

## KS1

1. % Las först in antalet tal

```
n=input('Hur många tal skall läsas in? ');

% Därefter själva talen

for i=1:n;
    x(i)=input('Ge ett tal: ');
end;

% Sedan multiplicera ihop alla, ett i taget

p=1;
for i=1:n;
    p=p*x(i);
end;

% Beräkna medelvärdet enligt formeln

m=p^(1/n);

disp(['Geometriskt medelvärde blir ', num2str(m)]);
```

2. % Las in värdena på a, b och c:

```
a= input('Ge värdet för parameter a: ');
b= input('Ge värdet för parameter b: ');
c= input('Ge värdet för parameter c: ');

% Gör en "tatt" x-vektor till plotten

x=-1:0.01:3;

% Fyra kurvor för olika k - plotta i slinga

for k=[1 1.5 3 5];
    y=a*cos(k*x)+b*x.^2-c;
    plot(x,y);
    hold on
end;
```

3. % Tänk på att program (script) har gemensam variabeluppsättning medan  
% funktioner har helt egna variabeluppsättningar.  
%  
% Gör en ruta för hur minnet ser ut i "workspace" (för programmen) och  
% en ruta för vardera funktionen. Uppdatera värdet för varje sats datorn utför.  
% Funktionen "glömmer" sedan alla värden när den kommer till sitt slut.

```
%-----
function [y,x]=f1(a,b,c);
    a=2*b
    x=a+c
    y=b+x
end;
```

```

%-----
function [a,b,c]=f2(y,x);
    a=3*x
    x=y+a
    c=x+y
    b=a-c
end;
%-----
x=1, y=2, z=5, a=10
[a,b]=f1(z,y,x)
c=x:y:z
d=[a,b,c,x,y,z]
%-----
x=1, y=2, z=5, a=10
[b,c]=f2(a,z)
c=x:y:z
d=[a,b,c,x,y,z]
%-----
Programmet p3 skriver då ut:

```

```

>> clear all, p3
x = 1
y = 2
z = 5
a = 10
a = 4
x = 5
y = 7
a = 7
b = 5
c =

    1    3    5

d =

    7    5    1    3    5    1    2    5

```

```

%-----
och programmet p4:

>> clear all, p4
x = 1
y = 2
z = 5
a = 10
a = 15
x = 25
c = 35
b = -20
b = 15
c = -20
c =

    1    3    5

```

d =

10 15 1 3 5 1 2 5

**KS2**

1. a) Eftersom  $B$  är en triangulär matris är determinanten av  $B$  lika med produkten av diagonalelementen,

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2.$$

Med determinanträknereglererna kan vi förenkla determinantuttrycket,

$$\begin{aligned} \det(A^3 B^T A^{-1}) &= \det(A^3) \cdot \det(B^T) \cdot \det(A^{-1}) \\ &= (\det A)^3 \cdot \det B \cdot (\det A)^{-1}, \end{aligned}$$

och därmed är

$$\det(A^3 B^T A^{-1}) = (-3)^3 \cdot 2 \cdot (-3)^{-1} = 18.$$

- b) Vi förenklar först matrisuttrycket

$$(A + AB^T)^{-1}A = (A(E + B^T))^{-1}A = (E + B^T)^{-1}A^{-1}A = (E + B^T)^{-1}.$$

Matrisen  $E + B^T$  är lika med

$$E + B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

och vi bestämmer dess invers med ett räkneschema

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 4 & 2 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \textcircled{-} \textcircled{-} \textcircled{-2} \textcircled{\frac{1}{2}} \\ \leftarrow \leftarrow \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & | & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & | & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 2 & | & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \textcircled{-} \textcircled{\frac{1}{3}} \\ \leftarrow \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & | & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & | & -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \textcircled{-2} \textcircled{\frac{1}{2}} \\ \leftarrow \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & | & 1 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \textcircled{\frac{1}{2}} \\ \leftarrow \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \sim$$

$$\left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{array} \right).$$

Alltså är

$$(A + AB^T)^{-1}A = (E + B^T)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

- c) Genom att flytta över termerna som innehåller  $X$  till vänsterledet och konstanttermen till högerledet får vi

$$AX - X = B,$$

där  $B = (1 \ 2 \ 3 \ 0)^T$ . Vi kan faktorisera vänsterledet till  $(A - E)X$  och om  $A - E$  är en inverterbar matris har matrisekvationen lösningen

$$X = (A - E)^{-1}B.$$

Vi har

$$\begin{aligned} \det(A - E) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \textcircled{-3} \quad \textcircled{-} \quad \textcircled{-3} \\ \leftarrow \quad \quad \quad \leftarrow \\ \leftarrow \quad \quad \quad \leftarrow \\ \leftarrow \quad \quad \quad \leftarrow \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & -7 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \{ \text{Kofaktorutveckling längs första kolumnen} \} \\ &= 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -4 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \\ -3 & -7 & 1 \end{vmatrix} = \{ \text{Sarrus regel} \} = 4 + 12 + 0 - 24 - 14 - 0 = -22 \end{aligned}$$

och eftersom determinantens värde är skild från noll är matrisen  $A - E$  inverterbar. Ett Matlab-program som löser matrisekvationen är alltså

$$\begin{aligned} A &= [2 \ 1 \ 3 \ 0; \ 3 \ 2 \ 5 \ 4; \ 1 \ 1 \ 2 \ 1; \ 3 \ 0 \ 2 \ 2]; \\ B &= [1; \ 2; \ 3; \ 0]; \\ X &= (A - \text{eye}(4)) \setminus B \end{aligned}$$

2. a) För att skriva linjen i parameterform behöver vi

1. en punkt på linjen,
2. en vektor parallell med linjen.

Som punkt på linjen väljer vi  $P = (4, -1, 3)$  och en vektor parallell med linjen är  $v = \overrightarrow{PQ} = Q - P = (6, -2, 7) - (4, -1, 3) = (2, -1, 4)$ . En parameterform för linjen är därför

$$(x, y, z) = (4, -1, 3) + t(2, -1, 4).$$

- b) Vi kan se planets ekvation som ett linjärt ekvationssystem

$$2x - y + 3z = 1.$$

Lösningen till detta enkla ekvationssystem är

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ -1 + 2s + 3t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

där  $s$  och  $t$  är parametrar, vilket också är en parameterform för planet.

- c) Skärningspunkten  $(x_0, y_0, z_0)$  är den punkt som både ligger på linjen och planet. Det finns alltså ett parametervärde  $t$  så att

$$(x_0, y_0, z_0) = (4, -1, 3) + t(2, -1, 4).$$

Skärningspunkten ska också uppfylla planets ekvation,

$$\begin{aligned} 2x_0 - y_0 + 3z_0 &= 2(4 + 2t) - (-1 - t) + 3(3 + 4t) \\ &= 8 + 4t + 1 + t + 9 + 12t \\ &= 18 + 17t \\ &= 1, \end{aligned}$$

vilket ger att  $t = -1$  och skärningspunkten är

$$(x_0, y_0, z_0) = (4, -1, 3) + (-1) \cdot (2, -1, 4) = (2, 0, -1).$$

- d) Punkten  $P$  svarar mot parametervärdet  $t = 0$  på linjen  $\ell$  och skärningspunkten svarar mot  $t = -1$ . Parametervärdet  $t = -2$  svarar därför mot en punkt på linjen som ligger på motsatt sida om planet jämfört med  $P$ . Ett svar är alltså att  $P = (4, -1, 3)$  och punkten  $(4, -1, 3) + (-2) \cdot (2, -1, 4) = (0, 1, -5)$  ligger på varsin sida om planet  $\pi$ .
3. Det kortaste avståndet mellan linjen  $\ell$  och den sökta linjen  $\ell'$  är det vinkelräta avståndet, dvs. om  $P$  och  $Q$  är de punkter på  $\ell$  resp.  $\ell'$  som ligger närmast varandra så är vektorn  $w = \overrightarrow{PQ}$  vinkelrät mot båda linjernas riktningsvektorer.

För att konstruera linjen  $\ell'$  väljer vi punkten  $P = (1, 2, 1)$  på  $\ell$  och vektorn  $w = \overrightarrow{PQ}$  som

$$w = 2 \cdot \frac{(1, 0, 1)}{|(1, 0, 1)|} = \sqrt{2}(1, 0, 1)$$

vars längd är 2 och som är vinkelrät mot riktningsvektorn  $u = (3, 2, -3)$  för linjen  $\ell$ .

Därmed blir  $Q = P + w = (1, 2, 1) + \sqrt{2}(1, 0, 1) = (1 + \sqrt{2}, 2, 1 + \sqrt{2})$ . Riktningen  $v$  för linjen  $\ell'$  ska vara vinkelrät mot både  $u$  och  $w$  och därför väljer vi

$$v = (3, 2, -3) \times (1, 0, 1) = (2, -6, -2).$$

Ett svar är alltså

$$(x, y, z) = (1 + \sqrt{2}, 2, 1 + \sqrt{2}) + t(2, -6, -2), \quad (t \text{ parameter}).$$

### KS3

1. a) Linjen  $y = 2x$  har riktningsvektorn  $v = (1, 2)$ . Om vi delar upp vektorn  $u$  i en komponent parallell med  $v$ ,

$$\text{proj}_v u = \frac{u \cdot v}{|v|^2} v = \frac{(0, 2) \cdot (1, 2)}{1^2 + 2^2} (1, 2) = \frac{4}{5}(1, 2)$$

och en komponent vinkelrät mot  $v$ ,

$$\text{proj}_v^\perp u = u - \text{proj}_v u = (0, 2) - \frac{4}{5}(1, 2) = \frac{1}{5}(-4, 2),$$

så kommer speglingen att avbilda komponenterna enligt

$$\text{proj}_v u \mapsto \text{proj}_v u \quad \text{och} \quad \text{proj}_v^\perp u \mapsto -\text{proj}_v^\perp u,$$

och vi får att  $u = \text{proj}_v u + \text{proj}_v^\perp u$  avbildas till

$$\begin{aligned} S(u) &= S(\text{proj}_v u) + S(\text{proj}_v^\perp u) = \text{proj}_v u - \text{proj}_v^\perp u \\ &= \frac{4}{5}(1, 2) - \frac{1}{5}(-4, 2) \\ &= \frac{1}{5}(8, 6). \end{aligned}$$

- b) Eftersom  $S \circ S$  är speglingen utförd två gånger så kommer alla vektorer avbildas på sig själva med  $S \circ S$ . Avbildningen  $S \circ S$  har därför enhetsmatrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

som matris.

2. a)  $\mathbf{R}^4$   
 b) Nollrummet består av alla vektorer  $v$  som avbildas på nollvektorn, dvs.  $Av = \mathbf{0}$ . Lösningarna till denna ekvation får vi med gausseliminering

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -5 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \ominus \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ \ominus \\ \oplus \end{array} \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Från detta slutschema kan vi avläsa att nollrummet är

$$v = \begin{pmatrix} -2s + t \\ s \\ -3t \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

och en bas är  $B = \{(-2, 1, 0, 0), (1, 0, -3, 1)\}$ .

3. a) Att  $\vec{OP}$  har koordinaterna  $(0, 1, 0)$  i basen  $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$  betyder att

$$\vec{OP} = 0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 = v_2,$$

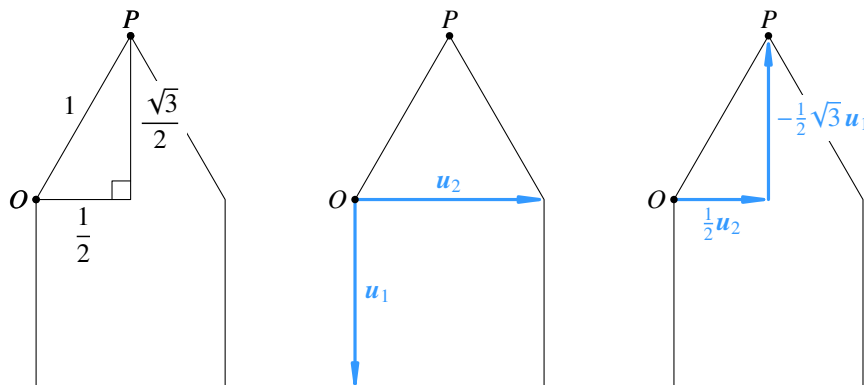
dvs. vi måste välja  $v_2 = \vec{OP}$ .

Vidare ska  $\vec{PQ}$  ska ha koordinaterna  $(0, 1, 1)$  i samma bas och det ger att

$$\vec{PQ} = 0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3 = v_2 + v_3,$$

dvs.  $v_3 = \vec{PQ} - v_2 = \vec{PQ} - \vec{OP}$ .

Vektorena  $\vec{PQ}$  och  $\vec{OP}$  har koordinaterna  $(0, 0, 1)$  resp.  $(-\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}, 0)$  i basen  $B$ .



Alltså ska vi välja

$$(\mathbf{v}_2)_B = (\overrightarrow{OP})_B = (-\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}, 0),$$

$$(\mathbf{v}_3)_B = (\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{OP})_B = (\overrightarrow{PQ})_B - (\overrightarrow{OP})_B = (0, 0, 1) - (-\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}, 0) = (\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}, 1).$$

Den första basvektorn  $\mathbf{v}_1$  kan vi välja fritt förutsatt att  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  är linjärt oberoende. T.ex. kan vi välja  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$ , vilket betyder att

$$(\mathbf{v}_1)_B = (\mathbf{u}_1)_B = (1, 0, 0).$$

b) Vi har att

$$P_{B \leftarrow B'} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ (\mathbf{v}_1)_B & (\mathbf{v}_2)_B & (\mathbf{v}_3)_B \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

och får att

$$P_{B' \leftarrow B} = (P_{B \leftarrow B'})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$