KS1

1.
```
% Las forst in antalet tal

n=input('Hur många tal skall läsas in? ');

% Darefter sjalva talen

for i=1:n;
  x(i)=input('Ge ett tal: ');
end;

% Sedan multiplicera ihop alla, ett i taget

p=1;
for i=1:n;
   p=p*x(i);
end;

% Berakna medelvardet enligt formeln

m=p^(1/n);

disp(['Geometriska medelvärdet blir ', num2str(m)]);
```

2.
```
% Las in varden pa a, b och c:

a= input('Ge värdet för parameter a: ');
b= input('Ge värdet för parameter b: ');
c= input('Ge värdet för parameter c: ');

% Gor en "tat" x-vektor till plotten

x=-1:0.01:3;

% Fyra kurvor for olika k - plotta i slinga

for k=[1 1.5 3 5];
  y=a*cos(k*x)+b*x.^2-c;
  plot(x,y);
  hold on
end;
```

3.
```
% Tänk på att program (script) har gemensam variabeluppsättning medan
% funktioner har helt egna variabeluppsättningar.
%
% Gör en ruta för hur minet ser ut i "workspace" (for programmen) och
% en ruta för vardera funktionen. Uppdatera värdet för varje sats datorn utför.
% Funktionen "glömmer" sedan alla värden när den kommer till sitt slut.

%------------------------------------------------------------------------
function [y,x]=f1(a,b,c);
   a=2*b
   x=a+c
   y=b+x
end;
```

```
%----------------------------------------------------------------------------
function [a,b,c]=f2(y,x);
  a=3*x
  x=y+a
  c=x+y
  b=a-c
end;
%----------------------------------------------------------------------------
x=1, y=2, z=5, a=10
[a,b]=f1(z,y,x)
c=x:y:z
d=[a,b,c,x,y,z]
%----------------------------------------------------------------------------
x=1, y=2, z=5, a=10
[b,c]=f2(a,z)
c=x:y:z
d=[a,b,c,x,y,z]
%----------------------------------------------------------------------------
Programmet p3  skriver då ut:


>> clear all, p3
x =  1
y =  2
z =  5
a =  10
a =  4
x =  5
y =  7
a =  7
b =  5
c =

   1   3   5

d =

   7   5   1   3   5   1   2   5

%----------------------------------------------------------------------------
och programmet p4:

>> clear all, p4
x =  1
y =  2
z =  5
a =  10
a =  15
x =  25
c =  35
b = -20
b =  15
c = -20
c =

   1   3   5
```

```
d =

    10    15     1     3     5     1     2     5
```

KS2

4. a) Eftersom B är en triangulär matris är determinanten av B lika med produkten av diagonalelementen,

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2.$$

Med determinanträknereglerna kan vi förenkla determinantuttrycket,

$$\begin{aligned} \det(A^3 B^T A^{-1}) &= \det(A^3) \cdot \det(B^T) \cdot \det(A^{-1}) \\ &= (\det A)^3 \cdot \det B \cdot (\det A)^{-1}, \end{aligned}$$

och därmed är

$$\det(A^3 B^T A^{-1}) = (-3)^3 \cdot 2 \cdot (-3)^{-1} = 18.$$

b) Vi förenklar först matrisuttrycket

$$(A + AB^T)^{-1} A = (A(E + B^T))^{-1} A = (E + B^T)^{-1} A^{-1} A = (E + B^T)^{-1}.$$

Matrisen $E + B^T$ är lika med

$$E + B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

och vi bestämmer dess invers med ett räkneschema

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} - \;\; - \;\; -2 \;\; \tfrac{1}{2} \\ \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \tfrac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ - \;\; \tfrac{1}{3} \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \tfrac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\tfrac{1}{3} & \tfrac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -2 \;\; \tfrac{1}{2} \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \tfrac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\tfrac{1}{3} & \tfrac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\tfrac{1}{2} & 0 & \tfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ \tfrac{1}{2} \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{array}\right).$$

Alltså är

$$(A + AB^T)^{-1}A = (E + B^T)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

c) Genom att flytta över termerna som innehåller X till vänsterledet och konstanttermen till högerledet får vi

$$AX - X = B,$$

där $B = (1\ \ 2\ \ 3\ \ 0)^T$. Vi kan faktorisera vänsterledet till $(A-E)X$ och om $A-E$ är en inverterbar matris har matrisekvationen lösningen

$$X = (A-E)^{-1}B.$$

Vi har

$$\det(A-E) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} -3 \quad - \quad -3 \\ \\ \\ \\ \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & -7 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \Big\{ \text{Kofaktorutveckling längs första kolumnen} \Big\}$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -4 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \\ -3 & -7 & 1 \end{vmatrix} = \{ \text{Sarrus regel} \} = 4 + 12 + 0 - 24 - 14 - 0 = -22$$

och eftersom determinantens värde är skild från noll är matrisen $A-E$ inverterbar. Ett Matlab-program som löser matrisekvationen är alltså

```
A = [2 1 3 0; 3 2 5 4; 1 1 2 1; 3 0 2 2];
B = [1; 2; 3; 0];
X = (A-eye(4))\B
```

5. a) För att skriva linjen i parameterform behöver vi

1. en punkt på linjen,
2. en vektor parallell med linjen.

Som punkt på linjen väljer vi $P = (4, -1, 3)$ och en vektor parallell med linjen är $v = \overrightarrow{PQ} = Q - P = (6, -2, 7) - (4, -1, 3) = (2, -1, 4)$. En parameterform för linjen är därför

$$(x, y, z) = (4, -1, 3) + t\,(2, -1, 4).$$

b) Vi kan se planets ekvation som ett linjärt ekvationssystem

$$2x - y + 3z = 1.$$

Lösningen till detta enkla ekvationssystem är

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ -1 + 2s + 3t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

där s och t är parametrar, vilket också är en parameterform för planet.

c) Skärningspunkten (x_0, y_0, z_0) är den punkt som både ligger på linjen och planet. Det finns alltså ett parametervärde t så att

$$(x_0, y_0, z_0) = (4, -1, 3) + t\,(2, -1, 4).$$

Skärningspunkten ska också uppfylla planets ekvation,

$$\begin{aligned} 2x_0 - y_0 + 3z_0 &= 2(4 + 2t) - (-1 - t) + 3(3 + 4t) \\ &= 8 + 4t + 1 + t + 9 + 12t \\ &= 18 + 17t \\ &= 1, \end{aligned}$$

vilket ger att $t = -1$ och skärningspunkten är

$$(x_0, y_0, z_0) = (4, -1, 3) + (-1) \cdot (2, -1, 4) = (2, 0, -1).$$

d) Punkten P svarar mot parametervärdet $t = 0$ på linjen ℓ och skärningspunkten svarar mot $t = -1$. Parametervärdet $t = -2$ svarar därför mot en punkt på linjen som ligger på motsatt sida om planet jämfört med P. Ett svar är alltså att $P = (4, -1, 3)$ och punkten $(4, -1, 3) + (-2) \cdot (2, -1, 4) = (0, 1, -5)$ ligger på varsin sida om planet π.

6. Det kortaste avståndet mellan linjen ℓ och den sökta linjen ℓ' är det vinkelräta avståndet, dvs. om P och Q är de punkter på ℓ resp. ℓ' som ligger närmast varandra så är vektorn $\boldsymbol{w} = \overrightarrow{PQ}$ vinkelrät mot båda linjernas riktningsvektorer.

För att konstruera linjen ℓ' väljer vi punkten $P = (1, 2, 1)$ på ℓ och vektorn $\boldsymbol{w} = \overrightarrow{PQ}$ som

$$\boldsymbol{w} = 2 \cdot \frac{(1, 0, 1)}{|(1, 0, 1)|} = \sqrt{2}\,(1, 0, 1)$$

vars längd är 2 och som är vinkelrät mot riktningsvektorn $\boldsymbol{u} = (3, 2, -3)$ för linjen ℓ.

Därmed blir $Q = P + \boldsymbol{w} = (1, 2, 1) + \sqrt{2}\,(1, 0, 1) = (1 + \sqrt{2}, 2, 1 + \sqrt{2})$. Riktningen $\boldsymbol{v}$ för linjen ℓ' ska vara vinkelrät mot både $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{w}$ och därför väljer vi

$$\boldsymbol{v} = (3, 2, -3) \times (1, 0, 1) = (2, -6, -2).$$

Ett svar är alltså

$$(x, y, z) = (1 + \sqrt{2}, 2, 1 + \sqrt{2}) + t\,(2, -6, -2), \quad (t \text{ parameter}).$$

KS3

7. a) Linjen $y = 2x$ har riktningsvektorn $\boldsymbol{v} = (1, 2)$. Om vi delar upp vektorn $\boldsymbol{u}$ i en komposant parallell med $\boldsymbol{v}$,

$$\operatorname{proj}_{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|^2}\,\boldsymbol{v} = \frac{(0, 2) \cdot (1, 2)}{1^2 + 2^2}\,(1, 2) = \tfrac{4}{5}(1, 2)$$

och en komposant vinkelrät mot $\boldsymbol{v}$,

$$\operatorname{proj}_{\boldsymbol{v}}^{\perp} \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} - \operatorname{proj}_{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{u} = (0, 2) - \tfrac{4}{5}(1, 2) = \tfrac{1}{5}(-4, 2),$$

så kommer speglingen att avbilda komposanterna enligt

$$\operatorname{proj}_{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{u} \mapsto \operatorname{proj}_{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{u} \quad \text{och} \quad \operatorname{proj}_{\boldsymbol{v}}^{\perp} \boldsymbol{u} \mapsto -\operatorname{proj}_{\boldsymbol{v}}^{\perp} \boldsymbol{u},$$

och vi får att $\boldsymbol{u} = \operatorname{proj}_{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{u} + \operatorname{proj}_{\boldsymbol{v}}^{\perp} \boldsymbol{u}$ avbildas till

$$\begin{aligned} S(\boldsymbol{u}) = S(\operatorname{proj}_{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{u}) + S(\operatorname{proj}_{\boldsymbol{v}}^{\perp} \boldsymbol{u}) &= \operatorname{proj}_{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{u} - \operatorname{proj}_{\boldsymbol{v}}^{\perp} \boldsymbol{u} \\ &= \tfrac{4}{5}(1, 2) - \tfrac{1}{5}(-4, 2) \\ &= \tfrac{1}{5}(8, 6). \end{aligned}$$

b) Eftersom $S \circ S$ är speglingen utförd två gånger så kommer alla vektorer avbildas på sig själva med $S \circ S$. Avbildningen $S \circ S$ har därför enhetsmatrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

som matris.

8. a) $\mathbf{R}^3$

b) Nollrummet består av alla vektorer v som avbildas på nollvektorn, dvs. $Av = \mathbf{0}$. Lösningarna till denna ekvation får vi med gausseliminering

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -5 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} - \quad -2 \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ - \quad + \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Från detta slutschema kan vi avläsa att nollrummet är

$$v = \begin{pmatrix} -2s + t \\ s \\ -3t \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

och en bas är $B = \{(-2, 1, 0, 0), (1, 0, -3, 1)\}$.

9. a) Att $\overrightarrow{OP}$ har koordinaterna $(0, 1, 0)$ i basen $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$ betyder att

$$\overrightarrow{OP} = 0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 = v_2,$$

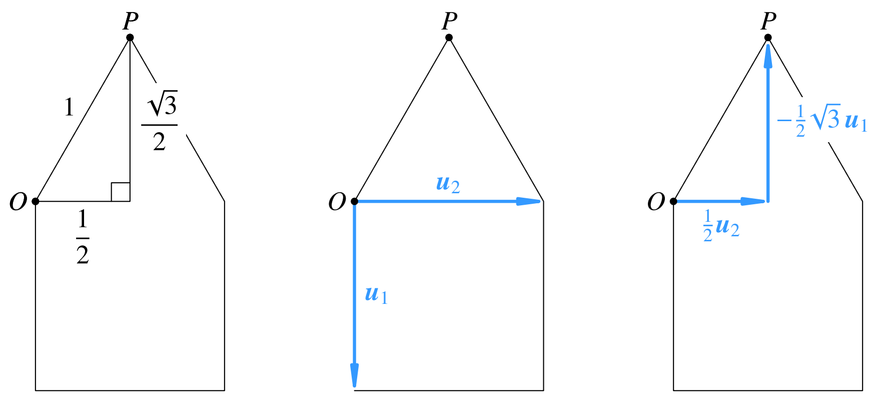
dvs. vi måste välja $v_2 = \overrightarrow{OP}$.

Vidare ska $\overrightarrow{PQ}$ ska ha koordinaterna $(0, 1, 1)$ i samma bas och det ger att

$$\overrightarrow{PQ} = 0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3 = v_2 + v_3,$$

dvs. $v_3 = \overrightarrow{PQ} - v_2 = \overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{OP}$.

Vektorerna $\overrightarrow{PQ}$ och $\overrightarrow{OP}$ har koordinaterna $(0, 0, 1)$ resp. $(-\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}, 0)$ i basen B.



Alltså ska vi välja

$$(\boldsymbol{v}_2)_B = (\overrightarrow{OP})_B = (-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}, \tfrac{1}{2}, 0),$$
$$(\boldsymbol{v}_3)_B = (\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{OP})_B = (\overrightarrow{PQ})_B - (\overrightarrow{OP})_B = (0,0,1) - (-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}, \tfrac{1}{2}, 0) = (\tfrac{1}{2}\sqrt{3}, -\tfrac{1}{2}, 1).$$

Den första basvektorn $\boldsymbol{v}_1$ kan vi välja fritt förutsatt att $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ är linjärt oberoende. T.ex. kan vi välja $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{u}_1$, vilket betyder att

$$(\boldsymbol{v}_1)_B = (\boldsymbol{u}_1)_B = (1,0,0).$$

b) Vi har att

$$P_{B\leftarrow B'} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ (\boldsymbol{v}_1)_B & (\boldsymbol{v}_2)_B & (\boldsymbol{v}_3)_B \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

och får att

$$P_{B'\leftarrow B} = (P_{B\leftarrow B'})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$