KTH Teknikvetenskap

SF1626 Flervariabelanalys
Tentamen
Måndagen den 26 maj, 2014

Skrivtid: 14:00-19:00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Mattias Dahl

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng.

Del A på tentamen utgörs av de tre första uppgifterna. Till antalet erhållna poäng från del A adderas dina bonuspoäng. Poängsumman på del A kan dock som högst bli 12 poäng. Bonuspoängen beräknas automatiskt. Antal bonuspoäng framgår från resultatsidan.

De tre följande uppgifterna utgör del B och de tre sista uppgifterna del C, som främst är till för de högre betygen.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

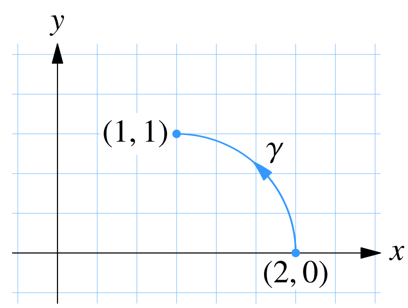
Var god vänd!

DEL A

1. Skissera definitionsmängden till funktionen
$$f(x,y) = \sqrt{x-y^2} - \ln(2-x).$$
Är definitionsmängden kompakt? **(4 p)**

2. Funktionen $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y - 1$ är definierad i hela xy-planet.
   a) Bestäm alla stationära punkter till f. **(2 p)**
   b) Avgör de stationära punkternas karaktär. **(2 p)**

3. Beräkna kurvintegralen
$$\int_\gamma (-2y)\,dx + x^2\,dy$$
där γ är kvartscirkelbågen uppritad i figuren. **(4 p)**



DEL B

4. Funktionen $f(x,y)$ är en kontinuerligt deriverbar funktion definierad i en omgivning av punkten $(1,0)$ i $\mathbb{R}^2$. Om denna funktion vet vi att
   - riktningsderivatan i $(1,0)$ längs x-axeln i positiv riktning är lika med 5,
   - riktningsderivatan i $(1,0)$ längs linjen $y = x - 1$ i riktning mot positiva y är lika med $-\sqrt{2}$.

   a) Bestäm gradienten till $f(x,y)$ i punkten $(1,0)$. **(2 p)**

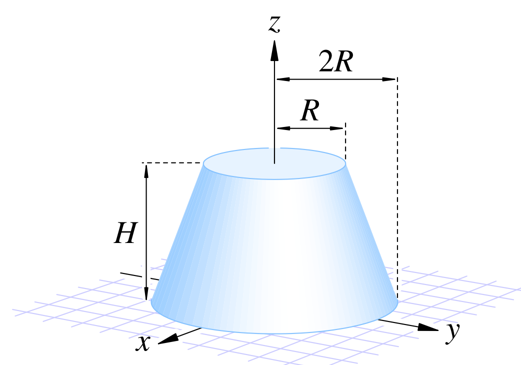
   b) Bestäm riktningsderivatan av $f(x,y)$ i punkten $(1,0)$ i riktning mot punkten $(3,-1)$. **(2 p)**

5. Betrakta funktionen $f(x,y) = 3x - 4y$ i området som bestäms av olikheten $x^2 + 4y^2 \leq 13$.

   a) Förklara hur man vet att f antar ett största och ett minsta värde i området. **(1 p)**

   b) Bestäm det största och det minsta värdet för f i området. **(3 p)**

6. Ett torn K har formen av en massiv stympad kon med cirkulärt tvärsnitt och mått enligt figuren.
   Av symmetriskäl ligger masscentrum för K på z-axeln. Beräkna z-koordinaten för masscentrum som ges av
$$m_z = \frac{1}{\text{vol}(K)} \iiint_K z\,dx\,dy\,dz$$
   där $\text{vol}(K)$ är volymen av K. **(4 p)**



Var god vänd!

Del C

7. Beräkna integralen
$$\iint_E f(x,y)\,dx\,dy$$
där E är kvadraten $\{(x,y)\colon 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$ och $f(x,y) =$ ”det kortaste avståndet från punkten (x,y) till randen av E”. **(4 p)**

8. a) Formulera divergenssatsen (Gauss sats). Ange alla förutsättningar. **(1 p)**

   b) Bestäm den slutna kompakta C^1-yta S som gör att flödesintegralen
$$\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{N}\,dS$$
blir så stor som möjligt, då
$$\boldsymbol{F} = (x - x^3, y - 3yz^2, z - 3y^2z)$$
och normalvektorn $\boldsymbol{N}$ är utåtpekande. Beräkna även flödesintegralen för detta fall. **(3 p)**

9. En kropp består av den del av ett klot som befinner sig mellan två parallella plan och har måtten
$$a = 3 \pm 0{,}01 \text{ cm},$$
$$b = 4 \pm 0{,}01 \text{ cm},$$
$$h = 1 \pm 0{,}01 \text{ cm},$$
där a och b är radien av respektive cirkulära ändcirkelskiva och h är avståndet mellan planen. Använd linjarisering (linjär approximation) för att bestämma klotets radie med felgränser. **(4 p)**