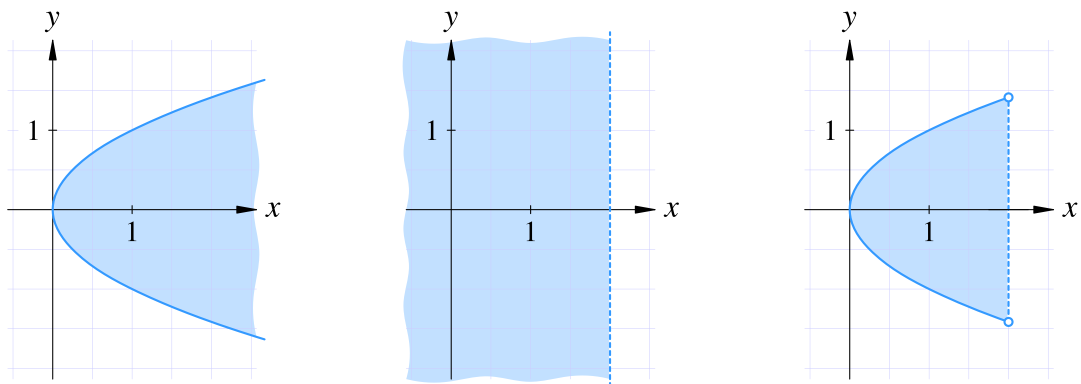
KTH Teknikvetenskap

SF1626 Flervariabelanalys
Lösningsförslag till tentamen 2014-05-26

Del A

1. Skissera definitionsmängden till funktionen
$$f(x,y) = \sqrt{x-y^2} - \ln(2-x).$$
Är definitionsmängden kompakt? **(4 p)**

Lösning. Termen $\sqrt{x-y^2}$ är definierad när $x-y^2 \geq 0$ och termen $\ln(2-x)$ är definierad när $2-x>0$. Tillsammans avgränsar dessa villkor definitionsmängden till f.



Området $x-y^2 \geq 0$ Området $2-x>0$ Definitionsmängden till f

Eftersom inte hela randen tillhör definitionsmängden så är den inte en kompakt mängd. □

2. Funktionen $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y - 1$ är definierad i hela xy-planet.
   a) Bestäm alla stationära punkter till f. **(2 p)**
   b) Avgör de stationära punkternas karaktär. **(2 p)**

Lösning. a) De stationära punkterna är de punkter (x,y) där $\nabla f(x,y) = 0$. Vi ska alltså hitta de punkter där

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2y = 0, \quad \text{och} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2x + 2 = 0.$$

Den andra av dessa ekvationer säger att $x = 1$, och därefter ger den första att $y = x = 1$. Den enda stationära punkten är alltså $(1,1)$.

b) I den stationära punkten är förstaderivatorna lika med noll, så Taylorutvecklingen till andra ordningen i punkten är

$$\begin{aligned} f(1+h_1, 1+h_2) &= f(1,1) + 0 \\ &+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1)\,h_1^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1)\,h_1 h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1)\,h_2^2\right) + \dots. \end{aligned}$$

För att avgöra punktens karaktär studerar vi den kvadratiska formen

$$Q(h_1,h_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1)\,h_1^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1)\,h_1 h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1)\,h_2^2.$$

Vi har

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0,$$

i alla punkter, så speciellt i punkten $(1,1)$. Den kvadratiska formen Q blir alltså

$$Q(h_1,h_2) = 2h_1^2 - 4h_1 h_2 + 0,$$

vilket vi kvadratkompletterar till

$$Q(h_1,h_2) = 2\,(h_1 - h_2)^2 - 2h_2^2.$$

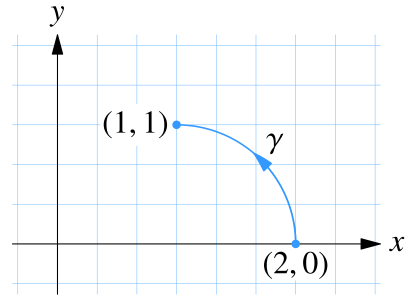
Detta är en indefinit kvadratisk form, så punkten $(1,1)$ är en sadelpunkt.

□

3. Beräkna kurvintegralen

$$\int_\gamma (-2y)\,dx + x^2\,dy$$

där γ är kvartscirkelbågen uppritad i figuren. **(4 p)**



Lösning. En parametrisering av γ är

$$x = 1 + \cos t, \quad y = \sin t,$$

där t går från 0 till $\pi/2$. Med denna parametrisering är

$$dx = \frac{dx}{dt}\,dt = -\sin t\,dt, \quad dy = \frac{dy}{dt}\,dt = \cos t\,dt,$$

och vi får att

$$\begin{aligned}
\int_\gamma (-2y)\,dx + x^2\,dy &= \int_0^{\pi/2} -2\sin t\cdot(-\sin t)\,dt + (1+\cos t)^2\cos t\,dt \\
&= \int_0^{\pi/2} \left(2\sin^2 t + \cos t + 2\cos^2 t + \cos^3 t\right)\,dt \\
&= \int_0^{\pi/2} \left(2 + \cos t + \cos t\left(1 - \sin^2 t\right)\right)\,dt \\
&= \Big[2t + \sin t\Big]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos t\left(1 - \sin^2 t\right)\,dt \\
&= \{\text{substituera } u = \sin t\} \\
&= \pi + 1 + \int_0^1 \left(1 - u^2\right)\,du \\
&= \pi + 1 + 1 - \frac{1}{3} \\
&= \pi + \frac{5}{3}.
\end{aligned}$$

□

DEL B

4. Funktionen $f(x,y)$ är en kontinuerligt deriverbar funktion definierad i en omgivning av punkten $(1,0)$ i $\mathbb{R}^2$. Om denna funktion vet vi att
   - riktningsderivatan i $(1,0)$ längs x-axeln i positiv riktning är lika med 5,
   - riktningsderivatan i $(1,0)$ längs linjen $y = x - 1$ i riktning mot positiva y är lika med $-\sqrt{2}$.

   a) Bestäm gradienten till $f(x,y)$ i punkten $(1,0)$. **(2 p)**

   b) Bestäm riktningsderivatan av $f(x,y)$ i punkten $(1,0)$ i riktning mot punkten $(3,-1)$. **(2 p)**

Lösning. a) Vi söker gradienten $\nabla f(1,0)$ och ansätter denna vektor till

$$\nabla f(1,0) = (a,b).$$

En enhetsvektor längs x-axeln i positiv riktning är $v_1 = (1,0)$, och riktningsderivatan i den riktningen är alltså

$$\nabla f(1,0) \cdot v_1 = (a,b) \cdot (1,0) = a = 5.$$

En enhetsvektor längs linjen $y = x - 1$ i positiv riktning är $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$. Riktningsderivatan i den riktningen är

$$\nabla f(1,0) \cdot v_2 = (a,b) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(a+b) = -\sqrt{2}.$$

Vi har alltså ekvationerna

$$a = 5, \quad a+b = -2,$$

vilket ger lösningen

$$\nabla f(1,0) = (5,-7).$$

b) En enhetsvektor som pekar från punkten $(1,0)$ mot punkten $(3,-1)$ är $v = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1)$. Riktningsderivatan i den riktningen är

$$\nabla f(0,0) \cdot v = (5,-7) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1) = \frac{17}{\sqrt{5}}.$$

$\square$

5. Betrakta funktionen $f(x,y) = 3x - 4y$ i området som bestäms av olikheten $x^2 + 4y^2 \leq 13$.
   a) Förklara hur man vet att f antar ett största och ett minsta värde i området. **(1 p)**
   b) Bestäm det största och det minsta värdet för f i området. **(3 p)**

Lösning. (a) Funktionen f antar ett största och ett minsta värde eftersom den är kontinuerlig och definierad på ett kompakt område. Se Sats 4, sidan 41, i kursboken.

(b) De sökta värdena antas i stationära punkter eller randpunkter eftersom singulära punkter saknas.
Området är en sluten ellipsskiva med centrum i origo.
Vi har att $\nabla f = (3, -4)$ vilket inte är lika med nollvektorn, så det finns inte någon stationär punkt där största eller minsta värde kan antas.
För att studera funktionens beteende på randen $g(x,y) = x^2 + 4y^2 = 13$ använder vi Lagranges metod. Tänkbara största och minsta värden fås då $\nabla f = \lambda \nabla g$ för något tal λ. Eftersom $\nabla g = (2x, 8y)$ ger detta ekvationerna

$$3 = 2\lambda x, \quad -4 = 8\lambda y.$$

Om $\lambda = 0$ har detta ingen lösning, så vi kan dela med λ och får

$$\frac{2}{3}x = \frac{1}{\lambda} = -2y$$

eller $x = -3y$. Insatt i $g(x,y) = x^2 + 4y^2 = 13$ ger detta

$$9y^2 + 4y^2 = 13$$

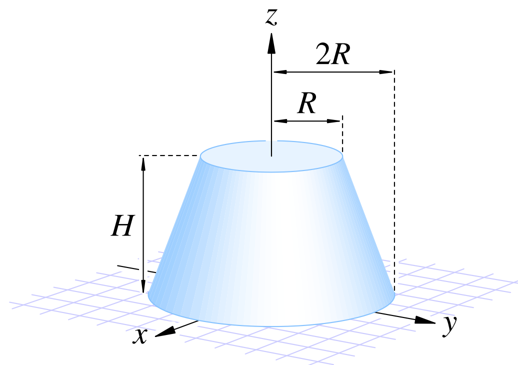
eller $y^2 = 1$ vilket ger $y = \pm 1$. Tillsammans får vi två tänkbara punkter där max och min kan antas,

$$(x,y) = (-3,1), \quad (x,y) = (3,-1).$$

Eftersom detta är de enda kandidaterna måste max resp. min antas i dessa punkter. Vi har $f(-3,1) = -13$ vilket alltså är det minsta värdet funktionen antar, och $f(3,-1) = 13$ vilket är det största.

□

6. Ett torn K har formen av en massiv stympad kon med cirkulärt tvärsnitt och mått enligt figuren.
Av symmetriskäl ligger masscentrum för K på z-axeln. Beräkna z-koordinaten för masscentrum som ges av
$$m_z = \frac{1}{\mathrm{vol}(K)} \iiint_K z\, dx\, dy\, dz$$
där $\mathrm{vol}(K)$ är volymen av K. **(4 p)**



Lösning. I cylindriska koordinater beskrivs tornet K av

$$0 \le z \le H, \quad 0 \le r \le R(2 - z/H), \quad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

Volymen av K ges av

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}(K) &= \iiint_K r\, dr\, d\theta\, dz \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^H \left(\int_0^{R(2-z/H)} r\, dr \right) dz \right) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^H \frac{1}{2} R^2 \left(2 - \frac{z}{H}\right)^2 dz \right) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{R^2}{2} \int_0^H \left(4 - \frac{4z}{H} + \frac{z^2}{H^2}\right) dz \right) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{R^2}{2} \left(4H - \frac{2H^2}{H} + \frac{H^3}{3H^2}\right) d\theta \\
&= 2\pi \cdot \frac{R^2}{2} \cdot \frac{7H}{3} \\
&= \frac{7\pi R^2 H}{3}.
\end{aligned}$$

Masscentrums z-koordinat är alltså

$$\begin{aligned}
m_z &= \frac{1}{\mathrm{vol}(K)} \iiint_K z dx dy dz \\
&= \frac{3}{7\pi R^2 H} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^H \left(\int_0^{R(2-z/H)} zr\, dr \right) dz \right) d\theta \\
&= \frac{3}{7\pi R^2 H} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^H z \frac{1}{2} R^2 \left(2 - \frac{z}{H}\right)^2 dz \right) d\theta
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{3}{7\pi R^2 H} \int_0^{2\pi} \left(\frac{R^2}{2} \int_0^H \left(4z - \frac{4z^2}{H} + \frac{z^3}{H^2} \right) dz \right) d\theta \\
&= \frac{3}{7\pi R^2 H} \int_0^{2\pi} \frac{R^2}{2} \left(2H^2 - \frac{4H^3}{3H} + \frac{H^4}{4H^2} \right) d\theta \\
&= \frac{3}{7\pi R^2 H} \cdot 2\pi \cdot \frac{R^2}{2} \cdot \frac{11H^2}{12} \\
&= \frac{11H}{28}.
\end{aligned}
$$

$\square$

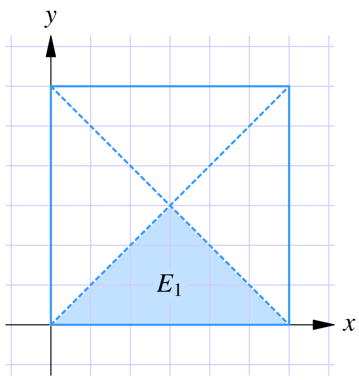
DEL C

7. Beräkna integralen

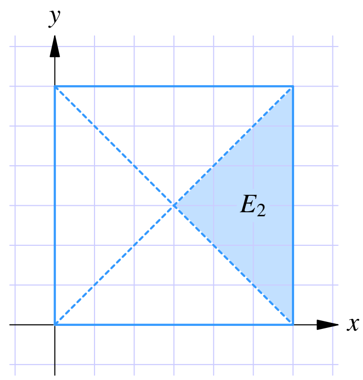
$$\iint_E f(x,y)\, dx\, dy$$

där E är kvadraten $\{(x,y)\colon\, 0 \leq x \leq 1,\, 0 \leq y \leq 1\}$ och $f(x,y) =$ ”det kortaste avståndet från punkten (x,y) till randen av E”. **(4 p)**

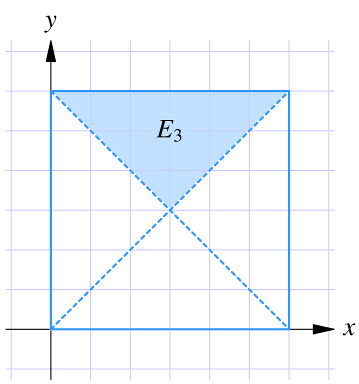
Lösning. Diagonalerna delar upp kvadraten i fyra områden där punkten (x,y) har kortast avstånd till respektive randlinje:



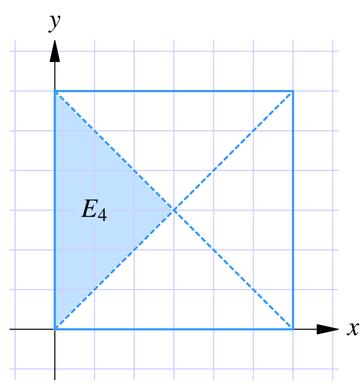
I området E_1 har (x, y) kortast avstånd till linjen $y = 0$.



I området E_3 har (x, y) kortast avstånd till linjen $x = 1$.



I området E_3 har (x, y) kortast avstånd till linjen $y = 1$.



I området E_4 har (x, y) kortast avstånd till linjen $x = 0$.

På grund av symmetrin är

$$\iint_E f(x,y)\, dx\, dy = 4 \iint_{E_1} f(x,y)\, dx\, dy = 4 \iint_{E_1} y\, dx\, dy.$$

Området E_1 kan beskrivas genom

$$0 \leq y \leq 1/2, \quad y \leq x \leq 1-y,$$

och vi får att

$$
\begin{aligned}
4\iint_{E_1} y\,dx\,dy &= 4\int_0^{1/2}\left(\int_y^{1-y} y\,dx\right)dy \\
&= 4\int_0^{1/2} y(1-2y)\,dy \\
&= 4\left[\frac{y^2}{2} - 2\,\frac{y^3}{3}\right]_0^{1/2} \\
&= 4\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{12}\right) \\
&= \frac{1}{6}.
\end{aligned}
$$

□

8. a) Formulera divergenssatsen (Gauss sats). Ange alla förutsättningar. **(1 p)**

b) Bestäm den slutna kompakta C^1-yta S som gör att flödesintegralen

$$\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{N}\,dS$$

blir så stor som möjligt, då

$$\boldsymbol{F} = (x - x^3, y - 3yz^2, z - 3y^2z)$$

och normalvektorn $\boldsymbol{N}$ är utåtpekande. Beräkna även flödesintegralen för detta fall. **(3 p)**

Lösning. a) Se läroboken sats 1 på sidan 368.

b) Vi har att divergensen av vektorfältet är

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\boldsymbol{F} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(x-x^3\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(y-3yz^2\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(z-3y^2z\right)\\ &= 1-3x^2+1-3z^2+1-3y^2\\ &= 3(1-x^2-y^2-z^2).\end{aligned}$$

Eftersom vektorfältets komponenter är polynom och vi antar att ytan S är en kompakt sluten C^1-yta så ger Gauss sats att

$$\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{N}\,dS = \iiint_K \operatorname{div}\boldsymbol{F}\;dx\,dy\,dz = \iiint_K 3(1-x^2-y^2-z^2)\;dx\,dy\,dz$$

där K är den kropp som ytan S innesluter.
Trippelintegralen blir så stor som möjligt när K är det område där integranden är icke-negativ,

$$1-x^2-y^2-z^2 \geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad x^2+y^2+z^2 \leq 1,$$

alltså K är klotet med radie 1 och medelpunkt i origo. I detta fall är ytan S enhetssfären med medelpunkt i origo.
Vi beräknar trippelintegralen genom att gå över till rymdpolära koordinater,

$$\begin{aligned}\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{N}\;dS &= \iiint_K 3(1-x^2-y^2-z^2)\,dx\,dy\,dz\\ &= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\left(\int_0^1 3(1-r^2)r^2\sin\theta\,dr\right)d\theta\right)d\phi\\ &= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\left(3\sin\theta\left[\frac{r^3}{3}-\frac{r^5}{5}\right]_0^1\right)d\theta\right)d\phi\end{aligned}$$

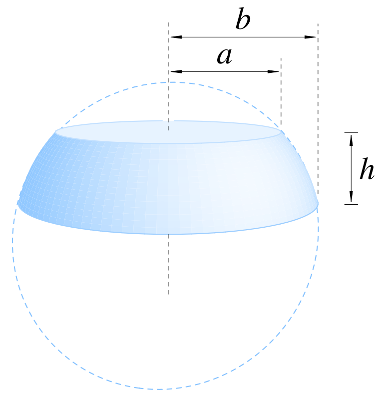
$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} \frac{2}{5} \sin\theta \, d\theta \right) d\phi \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{2}{5} \Big[-\cos\theta \Big]_0^{\pi} \right) d\phi \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{4}{5} \, d\phi \\
&= \frac{8\pi}{5}.
\end{aligned}
$$

□

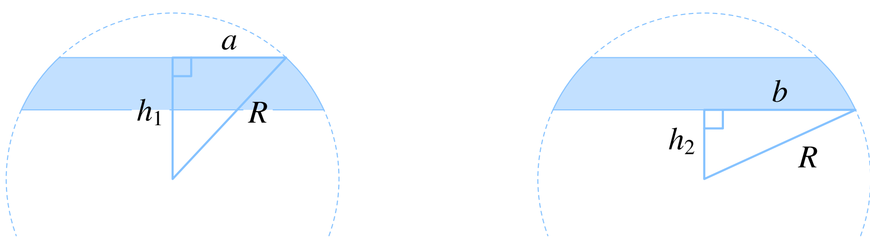
9. En kropp består av den del av ett klot som befinner sig mellan två parallella plan och har måtten

$$a = 3 \pm 0{,}01 \text{ cm},$$
$$b = 4 \pm 0{,}01 \text{ cm},$$
$$h = 1 \pm 0{,}01 \text{ cm},$$

där a och b är radien av respektive cirkulära ändcirkelskiva och h är avståndet mellan planen. Använd linjarisering (linjär approximation) för att bestämma klotets radie med felgränser. **(4 p)**



Lösning. Vi börjar med att bestämma R som en funktion av a, b, och h. Pythagoras sats ger att



$R^2 = a^2 + h_1^2$ $\qquad$ $R^2 = b^2 + h_2^2$

så vi har sambanden

$$R^2 = a^2 + h_1^2, \quad R^2 = b^2 + h_2^2, \quad h = h_1 - h_2.$$

Genom att eliminera h_1 får vi

$$R^2 = a^2 + (h + h_2)^2, \quad R^2 = b^2 + h_2^2.$$

Om vi löser ut h_2 ur den andra av dessa ekvationer, $h_2 = \sqrt{R^2 - b^2}$, och sätter in i den första får vi

$$\begin{aligned} R^2 &= a^2 + \left(h + \sqrt{R^2 - b^2}\right)^2 \\ &= a^2 + h^2 + 2h\sqrt{R^2 - b^2} + R^2 - b^2. \end{aligned}$$

Vi skriver om detta till

$$2h\sqrt{R^2 - b^2} = b^2 - a^2 - h^2$$

och kvadrererar för att få

$$4h^2(R^2 - b^2) = (b^2 - a^2 - h^2)^2$$

eller

$$R^2 = b^2 + \frac{(b^2 - a^2 - h^2)^2}{4h^2}.$$

Detta samband ger $R = R(a,b,h)$. När vi deriverar med avseende på a, b, och h, får vi

$$\begin{aligned}
2RR'_a &= \frac{2(b^2-a^2-h^2)}{4h^2}\cdot(-2a) = -\frac{a(b^2-a^2-h^2)}{h^2},\\
2RR'_b &= 2b + \frac{2(b^2-a^2-h^2)}{4h^2}\cdot 2b = 2b + \frac{b(b^2-a^2-h^2)}{h^2},\\
2RR'_h &= \frac{2(b^2-a^2-h^2)}{4h^2}\cdot(-2h) - 2\frac{(b^2-a^2-h^2)^2}{4h^3}\\
&= -\frac{b^2-a^2-h^2}{h} - \frac{(b^2-a^2-h^2)^2}{2h^3},
\end{aligned}$$

eller

$$\begin{aligned}
R'_a &= -\frac{a(b^2-a^2-h^2)}{2Rh^2},\\
R'_b &= \frac{b}{R} + \frac{b(b^2-a^2-h^2)}{2Rh^2},\\
R'_h &= -\frac{b^2-a^2-h^2}{2Rh} - \frac{(b^2-a^2-h^2)^2}{4Rh^3},
\end{aligned}$$

När $a = 3$, $b = 4$ och $h = 1$ så är $b^2 - a^2 - h^2 = 6$ och

$$\begin{aligned}
R &= \sqrt{16 + \frac{6^2}{4}} = 5,\\
R'_a &= -\frac{3\cdot 6}{2\cdot 5} = -\frac{18}{10}\\
R'_b &= \frac{4}{5} + \frac{4\cdot 6}{2\cdot 5} = \frac{32}{10},\\
R'_h &= -\frac{6}{2\cdot 5} - \frac{6^2}{4\cdot 5} = -\frac{24}{10}.
\end{aligned}$$

Linjariseringsformeln ger att

$$\begin{aligned}
&R(3+\Delta a, 4+\Delta b, 1+\Delta h)\\
&\quad = R(3,4,1) + R'_a(3,4,1)\Delta a + R'_b(3,4,1)\Delta b + R'_h(3,4,1)\Delta h + \text{restterm}\\
&\quad = 5 - \frac{18}{10}\Delta a + \frac{32}{10}\Delta b - \frac{24}{10}\Delta h + \text{restterm}.
\end{aligned}$$

Om vi försummer resttermen får vi att

$$\begin{aligned}
&|R(3+\Delta a, 4+\Delta b, 1+\Delta h) - R(3,4,1)|\\
&\quad \le \left| -\frac{18}{10}\Delta a + \frac{32}{10}\Delta b - \frac{24}{10}\Delta h \right|\\
&\quad \le \frac{18}{10}|\Delta a| + \frac{32}{10}|\Delta b| + \frac{24}{10}|\Delta h|
\end{aligned}$$

och eftersom $|\Delta a| \leq 0,01$, $|\Delta b| \leq 0,01$ och $|\Delta h| \leq 0,01$ ger detta feluppskattningen

$$\begin{aligned}
&|R(3+\Delta a, 4+\Delta b, 1+\Delta h) - R(3,4,1)| \\
&\quad \leq \frac{18}{10} \cdot 0,01 + \frac{32}{10} \cdot 0,01 + \frac{24}{10} \cdot 0,01 \\
&\quad = 0,074.
\end{aligned}$$

Vi kommer fram till att $R = 5 \pm 0,08$. $\square$
