Institutionen för Matematik

SF1625
Envariabelanalys
Läsåret 2014/2015

Uppgifter till Seminarium 3

Se www.kth.se/social/course/SF1625 för information om hur seminarierna fungerar och vad du förväntas göra inför och under seminarierna. Detta seminarium inleds med en inlämning. Lös uppgifterna 1-4 nedan och skriv ner lösningarna med en lösning per blad. Skriv namn och personnummer på varje blad. När seminariet börjar får du veta vilken uppgift som ska lämnas in. Innan du börjar med seminarieuppgifterna ska du lösa de rekommenderade uppgifterna ur ur kursboken Calculus av Adams och Essex (8:e upplagan), nämligen:
Kapitel 2.6: 3, 9. Kapitel 2.7: 1, 3, 11, 13, 23, 29. Kapitel 2.8: 5, 13, 21, 27. Kapitel 2.9: 3, 9, 13. Kapitel 2.9: 3, 9, 13. Kapitel 2.11: 5, 7, 13, 16, 17, 18, 19. Kapitel 3.1: 3, 9, 23. Kapitel 3.2: 3, 5, 9, 15, 25, 29. Kapitel 3.3: 3, 5, 7, 9, 19, 21, 31, 33, 43, 51, 59. Kapitel 3.4: 1, 3, 5, 9, 11, 17, 23, 25. Kapitel 3.5: 1, 3, 5, 7, 13, 19, 21, 23, 35. Kapitel 3.7: 1, 3, 5, 7, 9, 13, 15, 21, 25, 29.

UPPGIFTER

Uppgift 1. Låt $h(x) = (x^2 - 1)e^{2x-4}$

A. Bestäm en ekvation för tangenten till kurvan $y = f(x)$ i den punkt på kurvan som har x-koordinat 2.

B. Använd linjär approximation i $x = 2$ (dvs tangentlinjen från uppgift A) för att uppskatta funktionsvärdet $h(2.1)$.

Uppgift 2. Låt $f(x) = 4 \arcsin \sqrt{x} + 2 \arcsin \sqrt{1 - x}$. Svara på följande frågor (motivering krävs):

A. Vad är definitionsmängden till f?

B. Är f strängt växande?

C. Förklara varför är en strängt monoton funktion är injektiv och därmed inverterbar. Är f inverterbar?

D. Vad är det största värdet för f^{-1}?

Uppgift 3. När ett varmt objekt ställs i ett kallare rum för att svalna så gäller att avsvalningstakten är proportionell mot skillnaden i temperatur mellan objektet och det omgivande rummet. Detta kallas Newtons avsvalningslag. Om vi kallar objektets temperatur för T och det omgivande rummets temperatur för T_R så kan avsvalningslagen formuleras matematiskt som differentialekvationen

$$\frac{dT}{dt} = -\lambda(T - T_R),$$

där λ är någon positiv konstant.

A. Förklara varför differentialekvationen ovan är en precis matematisk formulering av avsvalningslagen.

B. Om T_0 är den temperatur som objektet hade från början, visa att funktionen

$$T(t) = T_R + (T_0 - T_R)e^{-\lambda t}$$

löser differentialekvationen med initialvillkoret $T(0) = T_0$.

C. Vid ett visst tillfälle placeras ett objekt med okänd temperatur i ett rum med temperaturen $20°C$. Efter 10 minuter är objektets temperatur $50°$ och efter ytterligare 10 minuter $40°$. Bestäm

(i) objektets begynnelsetemperatur

(ii) den tid det tar för objektets temperatur att sjunka från 40 till $30°C$.

Uppgift 4. En kurva i planet definieras (implicit) av ekvationen

$$\arctan{(xy)} = \frac{\pi}{4}e^{x-y}.$$

Finn ekvationen för tangenten till kurvan i punkten $(1, 1)$.

DISKUSSIONSUPPGIFTER

Här är några extra uppgifter att diskutera vid seminariet. Lösningar behöver inte skrivas ner i förväg.

- Bestäm $\arcsin(-1/2)$, $\arccos(-1/2)$, $\arctan\sqrt{3}$ och $\ln(1/\sqrt{e})$
- Beräkna $\arcsin(\sin(3\pi/4))$ och $\cos(\arcsin(1/5))$
- Beräkna $\cos(\arctan x)$, $\sin(\arctan x)$ och $\cos\left(\arccos\frac{4}{5} + \arcsin\frac{5}{13}\right)$
- Finns det något x sådant att $\arctan(\tan x) \neq x$? Ange ett sådant x om det finns och förklara annars varför det inte kan finnas.
- Finns det något x sådant att $\tan(\arctan x) \neq x$? Ange ett sådant x om det finns och förklara annars varför det inte kan finnas.