KTH Teknikvetenskap

SF1626 Flervariabelanalys
Tentamen
Torsdagen den 21 augusti, 2014

Skrivtid: 14:00-19:00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Mattias Dahl

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng.

Del A på tentamen utgörs av de tre första uppgifterna. Till antalet erhållna poäng från del A adderas dina bonuspoäng. Poängsumman på del A kan dock som högst bli 12 poäng. Bonuspoängen beräknas automatiskt. Antal bonuspoäng framgår från resultatsidan.

De tre följande uppgifterna utgör del B och de tre sista uppgifterna del C, som främst är till för de högre betygen.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

DEL A

1. Bestäm och skissera definitionsmängden till funktionen
$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1} + \sqrt{-1 - x}.$$
Är definitionsmängden kompakt? **(4 p)**

2. En vandrare befinner sig på en bergsknalle där höjden $h(x,y)$ ges $h(x,y) = 1000 - 3x^2 + xy - 4y^2$. Vandraren befinner sig för tillfället i den punkt vars koordinater i xy-planet är $(x,y) = (4,3)$. I vilka riktningar kan vandraren fortsätta utan att ändra sin höjd? **(4 p)**

3. Ange Taylorpolynomet av ordning 2 till funktionen
$$f(x,y) = e^{2x+xy+y^2}$$
i punkten $(0,0)$. Använd dessutom Taylorpolynomet för att approximera $f(0.1, 0.3)$. **(4 p)**

DEL B

4. Undersök vilka av följande vektorfält som är konservativa, och bestäm i förekommande fall en potentialfunktion.
   a) $\mathbf{F}(x, y) = (y - 2x, x - 1)$
   b) $\mathbf{F}(x, y) = (2x - y, x + 1)$

   (4 p)

5. Bestäm största och minsta värde till funktionen $f(x, y, z) = 2xy + 2yz$ på enhetssfären som ges av $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. **(4 p)**

6. Håkan är på semester och sitter i sitt tält som har formen av en halvssfär. Tältduken beskrivs av ytan
$$x^2 + y^2 + z^2 = 16, \quad z \geq 0.$$
Det regnar och regnets fallande från skyn beskrivs av vektorfältet
$$\mathbf{F}(x, y, z) = (0, -y, -1).$$
Håkan, som glömt att impregnera sitt tält, ser vattnet strömma genom tältduken. Hjälp honom att beräkna hur mycket som strömmar genom den. **(4 p)**

Var god vänd!

DEL C

7. Betrakta kurvintegralen

$$\int_C \left(9x^2y + 3y^3 - 24y\right)\, dx + \left(-x^3 - 3xy^2 + 3x\right)\, dy,$$

där C är en sluten kurva som inte skär sig själv, och genomlöps ett varv i positiv led. För vilket val av C får man det största värdet på integralen? Ange även detta värde. **(4 p)**

8. Låt D vara den obegränsade mängden

$$D = \{(x, y) :\ 0 \le y \le 1/x \le \pi/2\}.$$

Visa att den generaliserade dubbelintegralen

$$\iint_D \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}\, dxdy$$

är konvergent och beräkna dess värde. **(4 p)**

9. Låt m och n vara två positiva heltal. Betrakta funktionen

$$F(x, y) = \frac{x^n y^m}{x^2 + y^2}$$

där denna är definierad.

(a) Finns det något värde som vi kan ge $F(0, 0)$ så att funktionen blir kontinuerlig i $(0, 0)$? *Tips*: svaret ska förmodligen bero på m och n.

(b) Om nu F blir kontinuerlig i $(0, 0)$ med det givna värdet i punkten, så kan vi försöka bilda partialderivatorna med avseende på x och y i punkten $(0, 0)$. När finns de? *Tips*: svaret ska förmodligen bero på m och n.

(c) Antag nu att partialderivatorna finns. Blir då funktionen differentierbar i $(0, 0)$? *Tips*: svaret ska förmodligen bero på m och n.

(4 p)