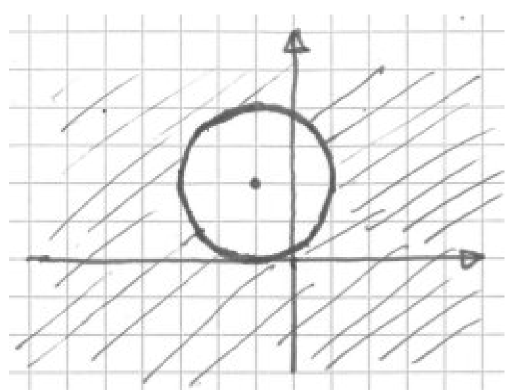
KTH Teknikvetenskap

SF1626 Flervariabelanalys
Lösningsförslag till tentamen 2014-XX-XX

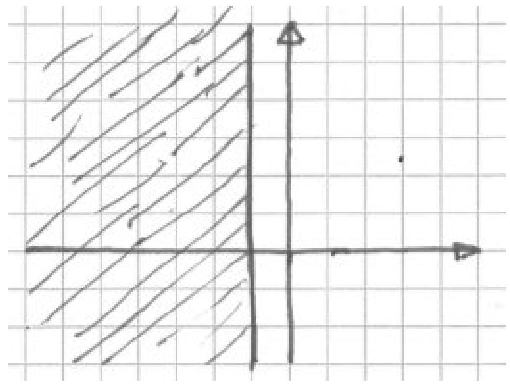
DEL A

1. Bestäm och skissera definitionsmängden till funktionen
$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1} + \sqrt{-1 - x}.$$
Är definitionsmängden kompakt? **(4 p)**

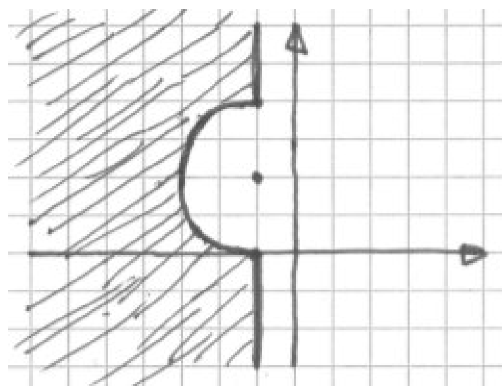
Lösning. Funktionen är definierad så länge
$$x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 \geq 0 \quad \text{och} \quad -1 - x \geq 0.$$
Vi kvadratkompletterar polynomet i den första olikheten och får
$$\begin{aligned} 0 &\leq x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 \\ &= x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 - 4 \\ &= (x + 1)^2 + (y - 2)^2 - 4, \end{aligned}$$
eller
$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 \geq 4.$$
Denna olikhet är uppfylld av alla punkter som ligger på eller utanför cirkeln med radie 2 och medelpunkt $(-1, 2)$.



Den andra olikheten är uppfylld av alla punkter (x, y) med $x \leq -1$, alltså på det halvplan som består av punkter på och till vänster om den lodräta linjen $x = -1$.



Definitionsmängden är alltså de punkter som uppfyller båda villkoren som beskrivs ovan.



Detta är en sluten mängd men den är inte begränsad, så den är inte kompakt. □

2. En vandrare befinner sig på en bergsknalle där höjden $h(x, y)$ ges $h(x, y) = 1000 - 3x^2 + xy - 4y^2$. Vandraren befinner sig för tillfället i den punkt vars koordinater i xy-planet är $(x, y) = (4, 3)$. I vilka riktningar kan vandraren fortsätta utan att ändra sin höjd?
(4 p)

Lösning. Vandraren ska stanna på den nivåkurva hon befinner sig på, alltså ovanför punkter (x, y) som uppfyller

$$h(x, y) = h(4, 3).$$

Gradienten till h är

$$\nabla h(x, y) = (-6x + y, x - 8y)$$

så

$$\nabla h(4, 3) = (-21, -20).$$

Vi vet att gradienten $\nabla h(4, 3)$ är vinkelrät mot nivåkurvan genom punkten. Vandraren ska alltså fortsätta i en riktning (a, b) som uppfyller

$$(a, b) \cdot (-21, -20) = 0,$$

det vill säga $(a, b) = t(20, -21)$ för något t. Som enhetsvektorer finns det två riktningar att fortsätta i (eftersom $20^2 + 21^2 = 29^2$!),

$$\frac{1}{29}(20, -21) \quad \text{och} \quad -\frac{1}{29}(20, -21).$$

$\square$

3. Ange Taylorpolynomet av ordning 2 till funktionen

$$f(x,y) = e^{2x+xy+y^2}$$

i punkten $(0,0)$. Använd dessutom Taylorpolynomet för att approximera $f(0.1, 0.3)$.

(4 p)

Lösning. I punkten $(0,0)$ är $2x+xy+y^2 = 0$ så vi använder Taylorutvecklingen av e^t vid $t = 0$,

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \text{rest},$$

där resten innehåller termer av grad 3 och högre. Med $t = 2x + xy + y^2$ blir

$$t^2 = 4x^2 + \text{rest}$$

där resten innehåller termer av grad 3 och 4. Vi får att

$$f(x,y) = 1 + 2x + xy + y^2 + 4x^2 + \text{rest}$$

där resten innehåller högre ordningens termer. På grund av entydighet för Taylorutvecklingar är detta det sökta Taylorpolynomet.

Om vi struntar i de högra termerna får vi ett approximativt värde för $f(0.1, 0.3)$,

$$\begin{aligned} f(0.1, 0.3) &\approx 1 + 2 \cdot 0.1 + 0.1 \cdot 0.3 + (0.3)^2 + 4 \cdot (0.1)^2 \\ &= 1 + 0.2 + 0.03 + 0.09 + 0.04 = 1.36. \end{aligned}$$

(Detta kan jämföras med $e^{2x+xy-y^2} = e^{0.2+0.03+0.09} = e^{0.32} = 1.377....$)

$\square$

DEL B

4. Undersök vilka av följande vektorfält som är konservativa, och bestäm i förekommande fall en potentialfunktion.
   a) $\mathbf{F}(x,y) = (y - 2x, x - 1)$
   b) $\mathbf{F}(x,y) = (2x - y, x + 1)$

(4 p)

Lösning. a) För $\mathbf{F}(x,y) = (y - 2x, x - 1)$ har vi

$$\frac{\partial}{\partial y}(y - 2x) = 1 = \frac{\partial}{\partial x}(x - 1).$$

Eftersom vektorfältet dessutom är definierat på hela xy-planet, vilket är ett enkelt sammanhängande område, så vet vi att det finns en potentialfunktion $U(x,y)$ sådan att $\nabla U = \mathbf{F}$. Funktionen U uppfyller alltså

$$\frac{\partial U}{\partial x} = y - 2x, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = x - 1.$$

Om vi integrerar den första av dessa ekvationer med avseende på x får vi

$$U(x,y) = yx - x^2 + \phi(y),$$

där $\phi(y)$ är en funktion som beror av y men inte av x. Detta insatt i den andra ekvationen ger

$$x - 1 = \frac{\partial U}{\partial y} = x + \phi'(y)$$

så vi drar slutsatsen att $\phi'(y) = -1$. En lösning till detta är $\phi(y) = -y$, så en potential är

$$U(x,y) = yx - x^2 - y.$$

b) Med $\mathbf{F}(x,y) = (2x - y, x + 1)$ är

$$\frac{\partial}{\partial y}(2x - y) = -1 \neq 1 = \frac{\partial}{\partial x}(x + 1).$$

Eftersom dessa partiella derivator inte är lika så är vektorfältet inte konservativt.

$\square$

5. Bestäm största och minsta värde till funktionen $f(x,y,z) = 2xy + 2yz$ på enhetssfären som ges av $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. **(4 p)**

Lösning. Vi söker kritiska punkter (x, y, z) med Lagranges multiplikatormetod. Vi ska alltså hitta lösningar till

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

för något tal λ, där g kommer från villkoret $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$. Eftersom $\nabla f = (2y, 2x + 2z, 2y)$ och $\nabla g = (2x, 2y, 2z)$ får vi ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2y = 2\lambda x, \\ 2x + 2z = 2\lambda y, \\ 2y = 2\lambda z, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1. \end{cases}$$

Om $\lambda = 0$ är $y = 0$ från första eller tredje ekvationen, och då är $f(x,y,z) = 0$. Eftersom 0 uppenbart inte är största eller minsta värde antar vi att $\lambda \neq 0$.

Från första och tredje ekvationen får vi $2\lambda x = 2\lambda y$, och alltså är $x = z$. Enligt andra ekvationen blir då $4x + 2\lambda y = 0$, dvs. $2x + \lambda y = 0$, medan enligt första ekvationen $2y + 2\lambda x = 0$, dvs. $y + \lambda x = 0$. Multiplikation med x respektive y ger relationerna $2x^2 + \lambda xy = 0$ och $y^2 + \lambda xy = 0$. Vi sluter oss till att $y^2 = 2x^2$. Fjärde ekvationen säger nu att $x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + 2x^2 + x^2 = 1$ så att $x^2 = \frac{1}{4}$ eller $x = \pm\frac{1}{2}$. Eftersom $y^2 = 2x^2 = \frac{1}{2}$ får vi $y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, där tecknen för x och y är oberoende av varandra. Slutligen har vi att $z = x$, och vi har funnit fyra kritiska punkter,

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right), \quad \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right), \quad \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right), \quad \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right).$$

där f antar värdena

$$f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right) = f\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2},$$
$$f\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right) = f\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{2}.$$

Det största värdet är alltså $\sqrt{2}$ och det minsta värdet är $-\sqrt{2}$. $\square$

6. Håkan är på semester och sitter i sitt tält som har formen av en halvssfär. Tältduken beskrivs av ytan
$$x^2 + y^2 + z^2 = 16, \quad z \geq 0.$$
Det regnar också och regnets fallande från skyn beskrivs av vektorfältet
$$\mathbf{F}(x, y, z) = (0, -y, -1).$$
Håkan, som glömt att impregnera sitt tält, ser vattnet strömma genom tältduken. Hjälp honom att beräkna hur mycket som strömmar genom den. **(4 p)**

Lösning. Tältduken ges av ytan
$$\Gamma = \{(x, y, z) : \ x^2 + y^2 + z^2 = 16, z \geq 0\}.$$
Normalen till Γ är $\mathbf{N} = \nabla(x^2 + y^2 + z^2) = (2x, 2y, 2z)$ vilket vi normaliserar till
$$\mathbf{n} = \mathbf{N}/|\mathbf{N}| = \frac{1}{8}(2x, 2y, 2z) = \frac{1}{4}(x, y, z).$$
Notera att $\mathbf{n}$ *pekar ut från tältet* medan det frågas om hur mycket som *regnar in i tältet*. Låt dS vara area-elementet på Γ. Det sökta flödet är alltså
$$-\iint_\Gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS.$$
Låt nu $\Gamma_0 = \{(x, y, 0) : x^2 + y^2 \leq 16\}$ vara tältets botten, och låt $\mathbf{n}_0 = (0, 0, -1)$ vara enhetsnormalen till Γ_0 som pekar nedåt. Gauss divergenssats ger att
$$\iiint_T \operatorname{div} \mathbf{F}\, dxdydz = \iint_\Gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS + \iint_{\Gamma_0} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_0\, dS.$$
Här är T den 3-dimensionella kropp som begränsas av ytorna Γ och Γ_0, alltså det övre halvklotet med radie 4 och medelpunkt i origo. Vi beräknar $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0 - 1 + 0 = -1$ och får alltså
$$\iiint_T \operatorname{div} \mathbf{F} dxdydz = -\iiint_T dxdydz = -\operatorname{vol}(T) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi 4^3}{3} = -\frac{128\pi}{3}.$$
Vidare är
$$\iint_{\Gamma_0} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_0\, dS = \iint_{\Gamma_0} (0, 0, -1) \cdot (0, 0, -1)\, dS = \operatorname{area}(\Gamma_0) = 16\pi.$$
Sammantaget erhålls från divergenssatsen att
$$-\frac{128\pi}{3} = \iint_\Gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS + 16\pi,$$
så flödet in genom tältduken är
$$-\iint_\Gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \frac{128\pi}{3} + 16\pi = \frac{176\pi}{3}.$$
□

DEL C

7. Betrakta kurvintegralen

$$\int_C \left(9x^2y + 3y^3 - 24y\right)\, dx + \left(-x^3 - 3xy^2 + 3x\right)\, dy,$$

där C är en sluten kurva som inte skär sig själv, och genomlöps ett varv i positiv led. För vilket val av C får man det största värdet på integralen? Ange även detta värde. **(4 p)**

Lösning. Kurvintegralen är

$$\int_C P\, dx + Q\, dy,$$

där

$$P = 9x^2y + 3y^3 - 24y, \quad Q = -x^3 - 3xy^2 + 3x.$$

Kurvan C utgör randen till ett område D och går runt detta område ett varv i positiv riktning. Enligt Greens formel är kurvintegralen lika med

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\, dxdy.$$

Vi har att

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 9x^2 + 9y^2 - 24, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -3x^2 - 3y^2 + 3.$$

Detta insatt i dubbelintegralen ger

$$\iint_D \left(27 - 12x^2 - 12y^2\right)\, dxdy.$$

Denna integral är störst om D är det område där integranden är icke-negativ, alltså där

$$27 - 12x^2 - 12y^2 = 12\left(\frac{27}{12} - x^2 - y^2\right) = 12\left(\frac{9}{4} - x^2 - y^2\right) \geq 0.$$

Detta innebär att D ska väljas som cirkelskivan med radie $3/2$ och medelpunkt i origo,

$$D = \{(x, y) :\ x^2 + y^2 \leq (3/2)^2\}.$$

Kurvintegralen får alltså störst värde om C går längs cirkeln $x^2 + y^2 = (3/2)^2$ i positiv led.

Det återstår att bestämma värdet på integralen. Vi byter till till polära koordinater och får

$$
\begin{aligned}
\iint_D \left(27-12x^2-12y^2\right)\,dxdy &= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{3/2}\left(27-12r^2\right) r\,dr\right)\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left(\left[\frac{27}{2}r^2-\frac{12}{4}r^4\right]_0^{3/2}\right)\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left(\frac{27}{2}\cdot\frac{9}{4}-\frac{12}{4}\cdot\frac{81}{16}\right)\,d\theta \\
&= 2\pi\cdot\frac{243}{16} \\
&= \frac{243\pi}{8}.
\end{aligned}
$$

Detta är det sökta maximala värdet på kurvintegralen. $\square$

8. Låt D vara den obegränsade mängden

$$D = \{(x,y) : 0 \leq y \leq 1/x \leq \pi/2\}.$$

Visa att den generaliserade dubbelintegralen

$$\iint_D \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}\, dxdy$$

är konvergent och beräkna dess värde. **(4 p)**

Lösning. Området D kan också skrivas som

$$D = \{(x,y) : 0 \leq y \leq 1/x, 2/\pi \leq x\}.$$

Vi definierar det begränsade området D_R genom

$$D_R = \{(x,y) : 0 \leq y \leq 1/x, 2/\pi \leq x \leq R\},$$

för $R > 2/\pi$. Då fyller D_R ut D när R går mot $+\infty$. Eftersom $0 < 1/x \leq \pi/2$ är $\sin(1/x) > 0$ och integranden är positiv, vilket innebär att integralens värde ej beror av valet av utfyllande områden. Vi beräknar den sökta dubbelintegralen som gränsvärdet

$$\lim_{R\to+\infty} \iint_{D_R} \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}\, dxdy.$$

Vi får

$$\begin{aligned}
\iint_{D_R} \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}\, dxdy &= \int_{2/\pi}^{R} \left(\int_0^{1/x} \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}\, dy \right) dx \\
&= \int_{2/\pi}^{R} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}\, dx \\
&= \{\text{sätt } t = 1/x\} \\
&= \int_{1/R}^{\pi/2} \sin t\, dt \\
&= [-\cos t]_{1/R}^{\pi/2} \\
&= \cos(1/R) - \cos(\pi/2) \\
&= \cos(1/R).
\end{aligned}$$

Då R går mot $+\infty$ går $1/R$ mot 0, så integralen går mot $\cos(0) = 1$. Eftersom detta gränsvärde existerar så är den generaliserade integralen konvergent, och dess värde är 1. $\square$

9. Låt m och n vara två positiva heltal. Betrakta funktionen

$$F(x, y) = \frac{x^n y^m}{x^2 + y^2}$$

där denna är definierad.

(a) Finns det något värde som vi kan ge $F(0,0)$ så att funktionen blir kontinuerlig i $(0,0)$? *Tips*: svaret ska förmodligen bero på m och n.

(b) Om nu F blir kontinuerlig i $(0,0)$ med det givna värdet i punkten, så kan vi försöka bilda partialderivatorna med avseende på x och y i punkten $(0,0)$. När finns de? *Tips*: svaret ska förmodligen bero på m och n.

(c) Antag nu att partialderivatorna finns. Blir då funktionen differentierbar i $(0,0)$? *Tips*: svaret ska förmodligen bero på m och n.

(4 p)

Lösning. Uttrycket $F(x,y) = x^n y^m/(x^2+y^2)$ är definierat för alla $(x,y) \neq (0,0)$, men inte definierat i $(0,0)$.

(a) Om $m = n = 1$ är $F(x,y) = xy/(x^2+y^2)$. Vi observerar att längs linjen $t,0)$ är funktionsvärdet $F(t,0) = 0$, och längs linjen (t,t) är funktionsvärdet $F(t,t) = \frac{1}{2}$. Då kan inte gränsvärdet $\lim_{(x.y)\to(0,0)} F(x,y)$ existera. Därför kan inte funktionen göras kontinuerlig i $(0,0)$ i detta fall. Om däremot $m+n > 2$ så gäller att $\lim_{(x.y)\to(0,0)} F(x,y) = 0$. Detta kan visas t ex med hjälp av polära koordinater. Så för $m+n > 2$ blir $F(x,y)$ kontinuerlig i $(0,0)$ om vi sätter $F(0,0) = 0$.

(b) Eftersom m och n är positiva gäller att $F(x,0) = 0$ och $F(0,y) = 0$ så att om vi deklarerar att $F(0,0) = 0$ så finns partialderivatorna $F'_x(0,0) = 0$ och $F'_y(0,0) = 0$ utan ytterligare villkor.

(c) Enligt del (b) är linjärapproximationen av $F(x,y)$ funktionen $L(x,y) = 0$, och differentierbarhet motsvarar att

$$\frac{F(x,y)}{|(x,y)|} = \frac{F(x,y) - L(x,y)}{|(x,y)|} \to 0 \quad \text{då} \ (x,y) \to (0,0).$$

Nu är

$$\frac{F(x,y)}{|(x,y)|} = \frac{x^n y^m}{(x^2+y^2)^{3/2}} = r^{n+m-3} \cos^n \theta \sin^m \theta$$

i termer av polära koordinater. Detta betyder att om $m+n > 3$ så blir funktionen differentierbar i origo, annars inte (vi närmar oss längs olika vinklar och får olika resultat).

$\square$