



## Uppgifter till Seminarium 6

Se [www.kth.se/social/course/SF1625](http://www.kth.se/social/course/SF1625) för information om hur seminarierna fungerar och vad du förväntas göra inför och under seminarierna. Detta seminarium inleds med ett skriftligt prov på (en variant av) någon av de rekommenderade övningsuppgifterna ur kursboken Calculus av Adams och Essex (8:e upplagan), nämligen:

Kapitel 6.1: 1, 3, 5, 7, 13, 21. Kapitel 6.2: 1, 5, 9, 11, 13, 23. Kapitel 6.3: 1, 3, 9. Kapitel 6.5: 1, 3, 5, 15, 23, 33, 34, 35. Kapitel 7.1: 1, 3, 5, 13, 19, 21. Kapitel 7.2: 1, 3.

Vid seminariet kommer nedanstående uppgifter att diskuteras.

---

### UPPGIFTER

**Uppgift 1.** Beräkna nedanstående integraler.

A.  $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$  (använd  $x = \cos t$ )

B.  $\int_e^{e^2} \frac{\ln(\ln x)}{x} dx$  (använd  $\ln x = t$ )

C.  $\int_0^{1/2} \arcsin x dx$  (börja med partiell integration)

D.  $\int_0^1 \frac{x-1}{x^2-5x+6} dx$  (använd partialbråksuppdelning)

**Uppgift 2.** Ett klot med radie  $r$  har sin medelpunkt på ytan av ett klot med radie  $R$ , där  $R > r$ . Beräkna volymen av den del av det mindre klotet som befinner sig inuti det större. (Använd rotationsvolymsteknik)

**Uppgift 3.** Under det tidiga 1970-talet växte världens årliga oljekonsumtionstakt  $f(t)$  exponentiellt med tillväxtkonstanten 0.07 (per år). I början av år 1970 var konsumtions-takten 16.1 miljarder fat olja per år. Detta ger

$$f(t) = 16.1e^{0.07t}, \quad t \geq 0,$$

där  $t$  är tiden (mätt i år) sedan början av 1970.

Oljekrisen 1974 ledde till dramatiskt ökade oljepriser och tillväxtkonstanten sjönk från 0.07 till 0.04. En ganska god modell för världens årliga oljekonsumtionstakt mellan åren 1974 och 1980 ges av

$$g(t) = 21.3e^{0.04(t-4)}, \quad t \geq 4,$$

där  $t = 4$  svarar mot början av år 1974.

Beräkna den totala mängd olja som sparades under åren 1976 till och med 1980 genom den ändring i oljekonsumtionstakten som oljekrisen skapade.

---

#### DISKUSSIONSUPPGIFTER

Här är några extra uppgifter att diskutera vid seminariet. Lösningar behöver inte skrivas ner i förväg.

- Ge exempel på en funktion som är inte integrerbar och förklara varför den inte är integrerbar.
- Funktionen  $f(x) = e^{x^2}$  är kontinuerlig på hela det slutna intervallet  $[0, 1]$  och är därför integrerbar där (se sats 2 i kapitel 5.3). Ändå går det inte att på vanligt sätt skriva upp en primitiv funktion till den. Finns det någon motsägelse här?
- Konvergerar eller divergerar integralen  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2 + 1} dx$ ?
- Beräkna  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}e^n} \int_n^{n+1} \sqrt{x}e^x dx$