

# Föreläsning 3

## Reglerteknik AK

©Bo Wahlberg

Avdelningen för reglerteknik  
Skolan för elektro- och systemteknik

9 september 2014



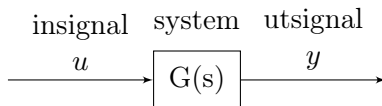
Förra gången:

- PID-reglering

Dagens program:

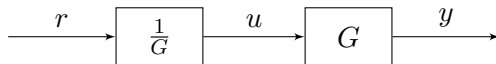
- Stabilitet
  - Rotort
  - Nyquist

# Vad är reglerteknik?



Målet är att  $y = r$  (referenssignal), trots störningar och begränsningar.

**Idé:** *Öppen styrning*, invertering

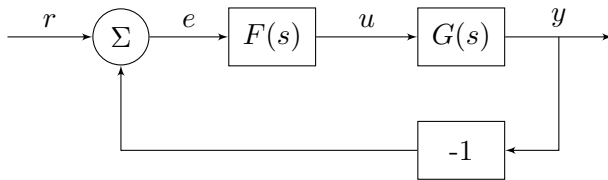


**Problem:**

- Tar ej hänsyn till störningar och modellfel
- Stor insignal  $U(s) = \frac{1}{G(s)}R(s)$
- Stabilt?

# Vad är reglerteknik?

Återkoppling från reglerfelet  $e = r - y$ .



- $r \mapsto y$ :  $G_c = \frac{FG}{1+FG}$
- $r \mapsto u$ :  $G_{ru} = \frac{F}{1+FG}$

**P-reglering:**  $F = K$  ( dvs.  $u = Ke$  )

- $G_c = \frac{KG}{1+KG} \approx 1$  om  $K$  stor
- $G_{ru} = \frac{K}{1+KG} \approx \frac{1}{G}$  om  $K$  stor

"Invertering mha återkoppling!"

Problem med stabilitet! (LAB 1)

## PI-reglering:

$$F(s) = K \left( 1 + \frac{1}{T_I} \frac{1}{s} \right), \quad F(0) = \infty$$

$$\implies G_c(0) = 1$$

dvs. inget stationärt fel,  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ . (Jmf slutvärdesteoremet)

## Problem:

- Problem med stabilitet
- Problem om styrsignalen,  $u$ , mättar (integratoruppvridding)

PD-reglering:

$$F(s) = K(1 + T_D s)$$

## Exempel (Inverterad pendel)

Överföringsfunktionen ges av

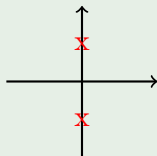
$$G(s) = \frac{1}{s^2 - g/l}$$

$$\Rightarrow G_c = \frac{FG}{1 + FG} = \frac{K[1 + T_D s]}{s^2 + KT_D s + K - g/l}$$

## Exempel (Inverterad pendel, fort.)

**Poler:**

Med  $T_D = 0$  fås



vilket ej fungerar.

Väljer vi istället  $T_D = 2/K$  och  $K = 1 + g/l$  ges polerna av ekvationen  $(s + 1)^2 = 0$ , dvs. dom hamnar i  $-1$  och  $-1$  (dubbelpol). Vilket är OK.



## Hur avgör man stabilitet?

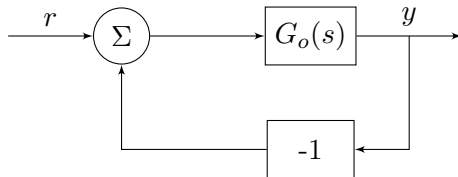
Asymptotiskt stabilt = Poler strikt i V.H.P.  $\Rightarrow$  Insignal-utsignalstabilt

**1** Räkna ut slutna systemets poler

**2** ■ Rouths algorithm (övning)

■ Rotort

■ Nyquistkriteriet



$G_o(s)$  är det öppna systemet.

$$Y(s) = \underbrace{\frac{G_o(s)}{1 + G_o(s)}}_{G_c(s)} R(s)$$

$G_c(s)$  är det slutna systemet.

Antag att

$$G_o(s) = K \frac{Q(s)}{P(s)}$$

så att

$$G_c(s) = \frac{KQ(s)}{P(s) + KQ(s)}$$

Polerna ges då av

$$P(s) + KQ(s) = 0 \quad (*)$$

**Rotort:**

Plotta polerna, dvs. rötterna till (\*), som funktion av  $K$  [ $0 < K < \infty$ ].

## Exempel (Rotort)

Antag

$$G_o(s) = \frac{K(S + 4)}{s(s + 1)(s + 2)}$$

Detta ger en ekvation (\*) på formen

$$\underbrace{s(s + 1)(s + 2)}_{P(s)} + K \underbrace{(s + 4)}_{Q(s)} = 0$$

som vi skriver om som

$$\frac{s(s + 1)(s + 2)}{(s + 4)} = -K$$

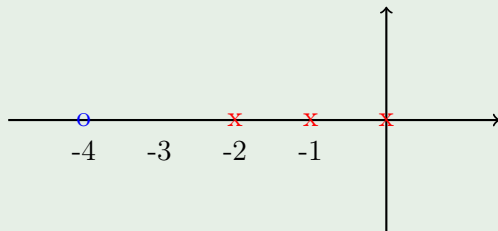
## Exempel (Rotort, fort.)

**I.** Startpunkter,  $K = 0$

Vi markerar dessa med kryss i grafen. I vårt fall ges de av  $s = 0, -1, -2$ .

**II.** Ändpunkter,  $K = \infty$

Vi markerar dessa med ringar i grafen. Vi har tre stycken,  
 $s = -4, \infty, \infty$ .



## Exempel (Rotort, fort.)

### III. Var ligger $\infty$ ?

Studera

$$\arg \left[ \frac{s(s+1)(s+2)}{(s+4)} \right] = \arg[-K] = \pi + 2\pi n, \quad n = 0, \pm 1, ..$$

$$\implies \arg s + \arg(s+1) + \arg(s+2) - \arg(s+4) = \pi + 2\pi n$$

Om  $s$  är stor kommer alla vinklar (argument) vara approximativt lika stora.

$$\implies 3\varphi - \varphi = \pi + 2\pi n$$

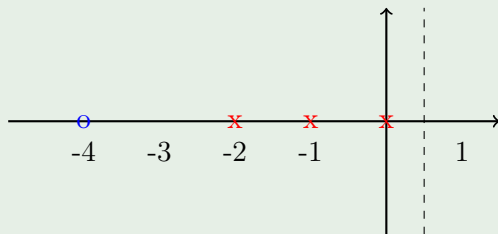
$$\implies \varphi = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

## Exempel (Rotort, fort.)

Strålar med dessa riktningar kallas *asymptoter*. De startar i *skärningspunkten* (se boken):

$$\frac{1}{2}[0 - 1 - 2 - (-4)] = \frac{1}{2}$$

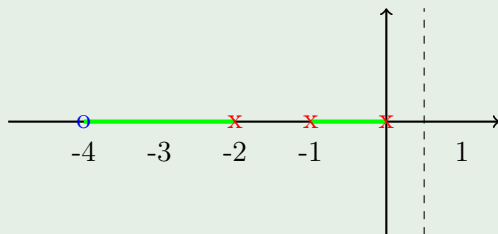
och har riktningar  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{3\pi}{2}$ .



## Exempel (Rotort, fort.)

IV. Var på Re-axeln kan det finnas rötter?

Punkter där *summan* av *antalet* start- och ändpunkter till *höger* är *udda* tillhör rotorten. (Se boken)





## Exempel (Rotort, fort.)

V. Var på Im-axeln kan det finnas rötter?

Ansätt att  $s = i\omega$  i (\*) och lös med avseende på  $\omega$  och  $K$ .

$$\begin{aligned}s^3 + 3s^2 + 2s + Ks + 4K &= 0 \\ \Rightarrow -i\omega^3 - 3\omega^2 + 2i\omega + Ki\omega + 4K &= 0\end{aligned}$$

Realdelen:

$$-3\omega^2 + 4K = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{4}{3}K$$

Imaginärdelen:

$$\begin{aligned}-\omega^3 + 2\omega + K\omega &= 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} \omega &= 0 \\ \omega^2 &= 2 + K \end{cases}\end{aligned}$$

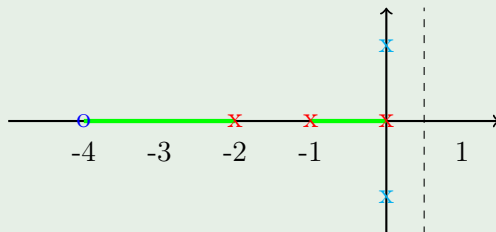
## Exempel (Rotort, fort.)

Den ena lösningen,  $\omega = 0$ , ger att  $K = 0$ .

Den andra,  $\omega^2 = 2 + K$ , ger  $2 + K = \frac{4}{3}K$  dvs.

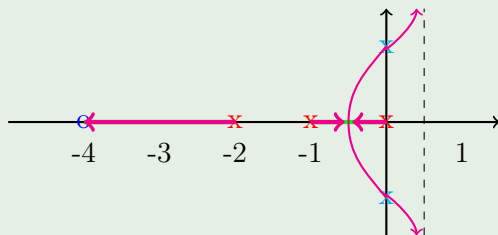
$$\Rightarrow \begin{cases} K = 6 \\ \omega = \pm\sqrt{8} \approx \pm 2.8 \end{cases}$$

Vi markerar dessa punkter i grafen:



## Exempel (Rotort, fort.)

### VI. Slutsats



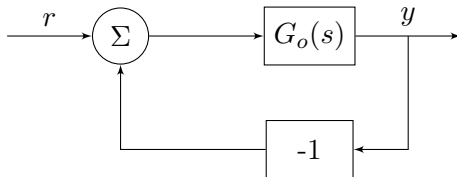
Stabilt för  $K < 6$ . Oscillativt när  $K$  närmar sig 6.

## Exempel (Rotort, fort.)

### Observationer:

- Rotorten är symmetrisk med avseende på Re-axeln ( $x \pm iy$ )
- En punkt ingår bara för ett visst  $K$ -värde ( $s \mapsto K$ )
- $K$  är ofta förstärkningen i en P-regulator. Metoden är dock mer generell.

Viktigt verktyg för att få en *uppfattning* om vad som händer när man ändrar på en parameter.



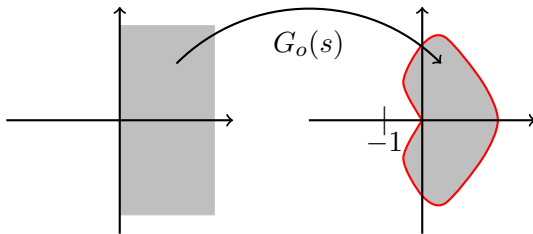
$$\Rightarrow G_c = \frac{G_o}{1 + G_o}$$

Polerna till  $G_c(s)$  ges av nollställen till  $1 + G_o(s)$ !

# Nyquistkriteriet

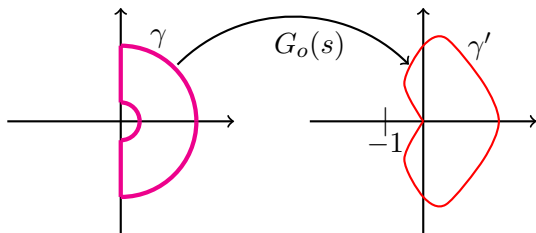
Finns det något  $s \in \text{H.H.P.}$  så att  $G_o(s) = -1$ ? ( $\Rightarrow$  Instabilt)

**Idé:** Pröva alla  $s \in \text{H.H.P.}$ .



# Nyquistkriteriet

Ett smartare sätt är att bara kolla randen om  $G_o(s) \neq \infty, s \in \text{H.H.P.}$ , dvs. om öppna systemet är stabilt.



## Sats (Förenklade Nyquistkriteriet)

*Antag  $G_o(s)$  är stabil (poler i  $s = 0$  är OK).*

*Då är  $G_c(s)$  asymptotiskt stabil om  $\gamma'$  ej omsluter  $-1$ .*

Nyquistkriteriet = Argumentvariationsprincipen

Viktigaste delen av kurvan är  $G_o(s)$ ,  $s = i\omega$ ,  $r < \omega < R$ .

Observera  $G_o(\infty) = 0$  och  $G_o(0) \approx K/s^p$  där  $p$  är antal poler i origo.