**SF1626 Flervariabelanalys**
**Tentamen 18 augusti 2011, 14.00 - 19.00**
**Svar och lösningsförslag**

(1) Låt $f(x,y) = xy - \ln(x+y^2)$.

I vilken riktning är riktningsderivatan till $f$ i punkten $(1,2)$ som störst, och hur stor är riktningsderivatan i denna riktning?

Finns det någon riktning i vilken riktningsderivatan till $f$ i punkten $(1,2)$ är lika med noll? Ange i sådana fall denna/dessa riktningar.

**Lösning (1).** Riktningsderivatan av en funktion $f$ i en punkt $P$ är störst i gradienten $\operatorname{grad} f(P)$:s riktning, och detta största värde ges av normen $|\operatorname{grad} f(P)|$. Riktningsderivatan är noll i rikting längs tangentlinjen till $f$:s nivåkurva genom punkten $P$, dvs ortogonalt mot $\operatorname{grad} f(P)$. Vi har att

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(y - \frac{1}{x+y^2}, x - \frac{2y}{x+y^2}\right)$$

så alltså är

$$\operatorname{grad} f(1,2) = \left(2 - \frac{1}{5}, 1 - \frac{4}{5}\right) = \left(\frac{9}{5}, \frac{1}{5}\right) \quad \text{och} \quad |\operatorname{grad} f(1,2)| = \frac{1}{5}\sqrt{82}.$$

Riktningar vinkelrätt mot gradienten ges av $\pm(-1,9)$.

**Svar (1):** Maximal riktningsderivata av $f$ i punkten $(1,2)$ är $\frac{1}{5}\sqrt{82}$ och fås i riktning $(9,1)$. Riktningsderivatan av $f$ i $(1,2)$ är noll i riktningarna $\pm(-1,9)$.

---

(2) Låt $T$ vara triangeln med hörn i $(0,0)$, $(1,0)$ och $(2,2)$. Skriv dubbelintegralen $\iint_T f(x,y)\,dxdy$ som en upprepad enkelintegral på två olika sätt, dvs med olika integrationsordning.

Beräkna också integralen i det fall då $f(x,y) = y$.

**Lösning (2).** Rita figur, ur den framgår omedelbart att området $T$ begränsas av de tre linjerna $y = 0$, $y = x$ och $y = 2x - 2 (\iff x = \frac{1}{2}y + 1)$. Vid integration först i $y$-led erhålls

$$\iint_T f(x,y)\,dxdy = \int_0^1 \int_0^x f(x,y)\,dy\,dx + \int_1^2 \int_{2x-2}^x f(x,y)\,dy\,dx.$$

Integration först med avseende på $x$ ger

$$\iint_T f(x,y)\,dxdy = \int_0^2 \int_y^{\frac{y}{2}+1} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Vi beräknar speciellt att

$$\iint_T y\,dxdy = \int_0^2 \int_y^{\frac{y}{2}+1} y\,dx\,dy = \int_0^2 y[x]_y^{\frac{y}{2}+1}\,dy = \int_0^2 y - \frac{y^2}{2}\,dy = \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{6}\right]_0^2 = \frac{2}{3}.$$

**Svar (2):** $\iint_T f(x,y)\,dxdy = \int_0^1 \int_0^x f(x,y)\,dy\,dx + \int_1^2 \int_{2x-2}^x f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^2 \int_y^{\frac{y}{2}+1} f(x,y)\,dx\,dy$ och $\iint_T y\,dxdy = \frac{2}{3}$ .

---

(3) Visa först att funktionen $f(x,y) = e^{x^2} - 2\cos y + xy + x^3$ har en stationär punkt i origo. Bestäm sedan den stationära punktens karaktär (dvs avgör om den är ett lokalt maximum, ett lokalt minimum eller en sadelpunkt).

**Lösning (3).** $f(x,y) = e^{x^2} - 2\cos y + xy + x^3$ så $f(0,0) = -1$. Vi beräknar förstaderivatorna

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= 2xe^{x^2} + y + 3x^2 &&\Longrightarrow f'_x(0,0) = 0,\\ f'_y(x,y) &= 2\sin y + x &&\Longrightarrow f'_y(0,0) = 0. \end{aligned}$$

Eftersom $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$ är origo en stationär punkt per definition. Vi beräkar vidare andraderivatorna

$$\begin{aligned} f''_{xx}(x,y) &= 2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2} + 6x &&\Longrightarrow f''_{xx}(0,0) = 2,\\ f''_{xy}(x,y) &= 1 &&\Longrightarrow f''_{xy}(0,0) = 1,\\ f''_{yy}(y,y) &= 2\cos y &&\Longrightarrow f''_{yy}(0,0) = 2. \end{aligned}$$

Det följer att andra ordningens Taylorpolynom $P$ i origo ges av

$$\begin{aligned} P(x,y) &= f(0,0) + f'_x(0,0)x + f'_y(0,0)y + \frac{1}{2}\left(f''_{xx}(0,0)x^2 + 2f''_{xy}(0,0)xy + f''_{yy}(0,0)y^2\right)\\ &= -1 + \frac{1}{2}\left(2x^2 + 2xy + 2y^2\right) = -1 + x^2 + xy + y^2 = -1 + \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2. \end{aligned}$$

Det följer att origo är ett lokalt minimum eftersom andragradstermen är positivt definit.

**Svar (3):** Då $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$ är origo en stationär punkt, och andra ordningens Taylorutveckling visar också att det är ett lokalt minimum.

---

(4) För en viss mängd gas gäller att $p = p(T,V) = \dfrac{8T}{V}$, där $p$ betecknar tryck [kPa], $T$ temperatur [K] och $V$ volym [m$^3$]. Använd linjär approximation för att beskriva hur trycket förändras för små variationer i temperatur och volym kring värdena $T = 300$ och $V = 2$.

Ange speciellt med hjälp av denna approximation ett ungefärligt värde på tryckförändringen som uppstår då tempertaturen ökar med 2 grader samtidigt som volymen ökar med 5 liter (dvs $5 \cdot 10^{-3}$ m$^3$).

**Lösning (4).** Den sökta linjära approximationen ges av

$$\Delta P(h,k) = P(300+h, 2+k) - P(300,2) \approx \frac{\partial P}{\partial T}(300,2)h + \frac{\partial P}{\partial V}(300,2)k.$$

Vi har att $\frac{\partial P}{\partial T} = \frac{8}{V}$ så $\frac{\partial P}{\partial T}(300,2) = 4$, och $\frac{\partial P}{\partial V} = -\frac{8T}{V^2}$ så $\frac{\partial P}{\partial V}(300,2) = -600$. Alltså är

$$\Delta P(h,k) = P(300+h, 2+k) - P(300,2) \approx 4h - 600k.$$

Speciellt fås med $h = 2$ och $k = 5 \cdot 10^{-3}$

$$\Delta P(2, 5\cdot 10^{-3}) \approx 4\cdot 2 - 600 \cdot 5 \cdot 10^{-3} = 8 - 3 = 5.$$

**Svar (4):**$\Delta P(h,k) = P(300+h, 2+k) - P(300,2) \approx 4h - 600k$ [kPa]. Speciellt är $\Delta P(2, 5\cdot 10^{-3}) \approx 5$[kPa] .

---

(5) Beräkna trippelintegralen

$$\iiint_K z\,dxdydz$$

där $K$ är den kropp som begränsas av planet $z = 3$ och konen $z = 4 - \sqrt{x^2+y^2}$.

**Lösning (5).** Integrationsområdet $K$ är en solid rät cirkulär kon med basytan i planet $z = 3$ och spets på $z$-axeln i punkten $(0,0,4)$. Där planet $z = 3$ och konen $z = 4 - \sqrt{x^2+y^2}$ skär varandra gäller att $3 = 4 - \sqrt{x^2+y^2} \iff x^2 + y^2 = 1$, dvs integrationsområdets projektion på $xy$-planet är cirkelskivan $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 1\}$.Vi får

$$\iiint_K z\,dxdydz = \iint_D \int_3^{4-\sqrt{x^2+y^2}} z\,dz\,dxdy = \iint_D \left[\frac{z^2}{2}\right]_3^{4-\sqrt{x^2+y^2}} dxdy$$

$$= \frac{1}{2}\iint_D \left(4 - \sqrt{x^2+y^2}\right)^2 - 3^2\,dxdy = \frac{1}{2}\iint_D \left(7 - 8\sqrt{x^2+y^2} + x^2 + y^2\right)dxdy$$

{Vi byter till polära koordinater}

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 (7 - 8r + r^2)r\,dr\,dv = \frac{13}{12}\pi$$

**Svar (5):** $\frac{13}{12}\pi$

---

(6) Vektorfältet $\mathbf{F} = (P,Q)$ är definierat i hela planet $\mathbb{R}^2$, förutom i origo, av

$$P = \frac{-y}{x^2+y^2}, \quad Q = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad (x,y) \ne (0,0).$$

a) Bestäm kurvintegralen $\int_{\gamma_1} \mathbf{F}\,d\mathbf{r}$ då $\gamma_1$ är en cirkel med radie 1, medelpunkt i $(2,0)$ och orienterad moturs. (2 p)

b) Bestäm kurvintegralen $\int_{\gamma_2} \mathbf{F}\, d\mathbf{r}$ då $\gamma_2$ är en cirkel med radie 1, medelpunkt i origo och orienterad moturs. (2 p)

**Lösning (6).** a) Fältet $\mathbf{F} = (P, Q)$ är definierat och kontinuerligt deriverbart i ett område innehållande den cirkelskiva $C_1$ som begränsas av $\gamma_1$ (origo ligger ej innanför $\gamma_1$). Vi kan använda Greens formel och får

$$\int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{C_1} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\, dxdy = 0$$

eftersom $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

b) Eftersom $\gamma_2$ är randen till ett område som innehåller origo där fältet inte är definierat kan vi inte använda Greens formel. Vi parameteriserar $\gamma_2$ med $(x, y) = (\cos t, \sin t)$, $0 \le t \le 2\pi$ vilket ger $(dx/dt, dy/dt) = (-\sin t, \cos t)$. Vi får, eftersom $x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$ på $\gamma_2$, att

$$\int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \left(\frac{-\sin t}{cos^2 t + \sin^2 t}, \frac{\cos t}{cos^2 t + \sin^2 t}\right) \cdot (-\sin t, \cos t)\, dt = \int_0^{2\pi} \cos^2 t + \sin^2 t\, dt = 2\pi$$

**Svar (6):** a) $\int_{\gamma_1} \mathbf{F}\, d\mathbf{r} = 0$ och b) $\int_{\gamma_2} \mathbf{F}\, d\mathbf{r} = 2\pi$

---

(7) (a) Beräkna med hjälp av Gauss sats (Divergenssatsen) flödet av vektorfältet $\mathbf{F}(x, y, z) = (y^2, x^2, 2z - 1)$ ut ur den kropp $K$ som begränsas av ytorna $z = 1 - x^2 - y^2$ och $z = 0$. (2p)

(b) Beräkna den del av flödet som går igenom den buktiga delen av begräsningsytan till $K$. (2p)

**Lösning (7).** a) Gauss sats ger att flödet $\iint_{\partial K} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS$ fås som

$$\iint_{\partial K} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS = \iiint_K \operatorname{div} \mathbf{F}\, dxdydz = \{\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(y^2) + \frac{\partial}{\partial y}(x^2) + \frac{\partial}{\partial z}(2z-1) = 2\}$$
$$= 2 \iiint_K dxdydz = 2 \iint_{x^2+y^2 \le 1} \int_0^{1-x^2-y^2} dz\, dxdy = 2 \iint_{x^2+y^2 \le 1} (1 - x^2 - y^2)\, dxdy$$

{Vi byter till polära kooridnater}

$$= 2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - r^2) r\, dr\, dv = \pi.$$

b) Den plana bottenytan är cirkelskivan $D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \le 1, z = 0\}$. Vi beräknar den del av flödet ut ur $K$ som går igenom $D$. Eftersom flödesriktningen skall vara ut ur $K$ skall $D$ förses med enhetsnormal $(0, 0, -1)$.

$$\iint_D \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS = \iint_D (y^2, x^2, 2z - 1) \cdot (0, 0, -1) dS = \{z = 0\} = \iint_D dxdy = \pi.$$

Eftersom nettoflödet ut ur $K$ är lika med flödet ut genom den plana delytan $D$, följer det att nettoflödet ut genom den buktiga delen $= 0$.

**Svar (7):** a) $\pi$ ; b) 0.

---

(8) Undersök om funktionen

$$f(x,y) = \frac{1+3x^2-x^2y^2}{1+x^2}$$

antar något största respektive minsta värde på det oändliga bandet
$\{(x,y) : -\infty < x < \infty, -1 \le y \le 1\}$.

Ange i förekommande fall största respektive minsta värde och i vilka punkter dessa antas.

**Lösning (8).** Vi konstaterar först att $f(0,y) = 1$ för alla $-1 \le y \le 1$, och att om $x \neq 0$ är $f(x,y) > 1$ ty

$$f(x,y) = \frac{1+3x^2-x^2y^2}{1+x^2} = 1 + (2-y^2)\frac{x^2}{1+x^2} > 1 \quad x \neq 0, |y| < 1.$$

Alltså är $f(0,y) = 1$ minsta värde.

Vi har också att

$$f(x,y) = 1 + (2-y^2)\frac{x^2}{1+x^2} \le 1 + 2\frac{x^2}{1+x^2} = 1 + 2\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) < 3.$$

Eftersom också

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x,0) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1+3x^2}{1+x^2} = 3$$

gäller att $f$ antar värden godtyckligt nära 3 men är $< 3$ på hela området — största värde saknas alltså.

**Svar (8):** Funktionen $f$ har ett minsta värde 1 på bandet, som antas i alla punkter $(0,y)$ på $x$-axeln, $-1 \le y \le 1$, dvs $f_{\min} = f(0,y) = 1$. Funktionen saknar största värde på bandet.

---

(9) Beräkna volymen av den parallellepiped som ges av olikheterna

$$\begin{cases} -1 \le -x+y-z \le 1 \\ -1 \le x+2y+3z \le 1 \\ -1 \le x+y+z \le 1 \end{cases} .$$

**Lösning (9).** Låt $P$ vara den angivna parallellepipeden. Inför nya koordinater $(u,v,w) = T(x,y,z)$ genom

$$T : \begin{cases} u = -x + y - z \\ v = x + 2y + 3z \\ w = x + y + z \end{cases} .$$

Låt $Q = T(P)$, som blir ett rätblock i $(u,v,w)$-rummet, $-1 \leq u, v, w \leq 1$.

$$\text{Volymen}(P) = \iiint_P dxdydz = \{\text{variabelbyte}\} = \iiint_Q \left| \frac{d(x,y,z)}{d(u,v,w)} \right| dudvdw.$$

Mellan Jacobideterminanterna för $T$ och och den inversa avbildningen $T^{-1}$ råder sambandet

$$\frac{d(x,y,z)}{d(u,v,w)} = \frac{1}{\frac{d(u,v,w)}{d(x,y,z)}}.$$

Vi beräknar $\frac{d(u,v,w)}{d(x,y,z)} = 4$. Alltså

$$\text{Volymen}(P) = \iiint_Q \left| \frac{1}{4} \right| dudvdw = \frac{1}{4} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} du\, dv\, dw = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{4} = 2$$

**Svar (9):** 2 volymsenheter