Föreläsning 1.

1 Vektorer och tensorer

Vi kommer att använda två olika beteckningar för vektorer. Enligt det första systemet använder vi fet stil för en vektor i typsatt text och ett vektorstreck då vi skriver för hand. I typsatt text skriver vi hastighetsvektorn

$$\mathbf{u} = u\mathbf{e}_x + v\mathbf{e}_y + w\mathbf{e}_z \,, \tag{1}$$

där $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ och $\mathbf{e}_z$ är enhetsvektorerna i x-, y- och z-riktningen, med avseende på ett Cartesiskt koordinatsystem, och u, v och w är hastighetsvektorns komponenter med avseende på de tre koordinataxlarna. Då vi skriver för hand använder vi istället vektorstreck:

$$\bar{u} = u\bar{e}_x + v\bar{e}_y + w\bar{e}_z \tag{2}$$

Enligt det andra systemet som kallas Cartesisk tensornotation, refererar vi till ett Cartesiskt koordinatsystem i vilket vi istället betecknar koordinataxlarna med x_1, x_2 och x_3. Hastighetsvektorn skriver med ett indexnotation, helt enkelt som

$$u_i \,, \tag{3}$$

där i kan vara 1, 2 eller 3.

En vektors komponenter kan uttryckas i olika koordinatsystem. Om vi byter koordinatsystem så ska vektorn förbli oförändrad. Med ett finare ord säger vi att den är koordinatinvariant. Detta innebär att dess komponenter måste transformeras. Antag att vi känner till hastighetsvektors komponenter u_1, u_2 och u_3 med avseende på ett Cartesiskt koordinatsystem med axlarna x_1, x_2 och x_3 och vill uttrycka dess komponenter, u'_1, u'_2 och u'_3 med avseende på ett annat Cartesiskt koordinatsystem med axlarna x'_1, x'_2 och x'_3. Kravet att vektorn ska vara oberoende av koordinatsystem ger då att

$$u'_i = \sum_{j=1}^{3} u_j C_{ji} \,, \tag{4}$$

där $C_{ij} = \cos\alpha_{ij}$ och α_{ij} är vinkeln mellan den i:te axeln i det oprimmade systemet och den j:te axeln i det primmade systemet. Exempelvis så är α_{12} vinkeln mellan x_1- och x'_2-axeln. C_{ij} är en transformationsmatris med nio element. Vi kan lägga märke till att indexet j som vi summerar över förekommer två gånger i uttrycket (4). Detta faktum tillåter oss att skriva uttrycket utan att använda någon summationssymbol, om vi underförstår att vi ska summera över det index som förekommer två gånger. Vi kan alltså istället skriva

$$u'_i = u_j C_{ji} \,, \tag{5}$$

där vi nu inte får glömma att vi summerar över j. Regeln att summera över det index som förekommer två gånger i ett uttryck kallas Einsteins summationsregel. Vi kommer hädanefter att använda oss av denna regel.

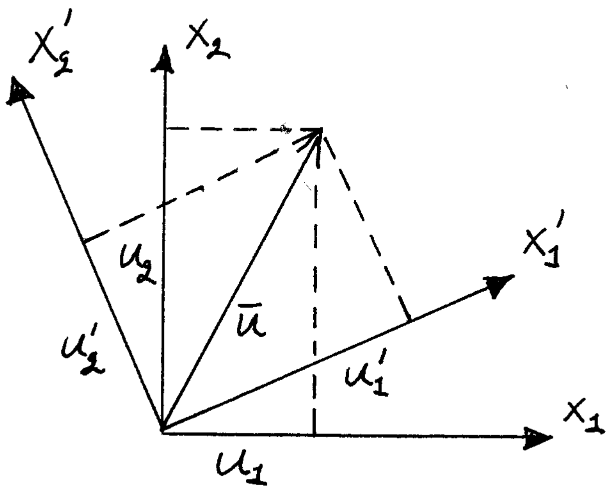

Figure 1: En vektors komponenter i två olika koordinatsystem.

En vektor är ett exempel på ett mer generellt matematiskt objekt som kallas tensor. En vektor är en första rangens tensor. En andra rangens tensor har nio komponenter och en tensor av rang n har 3^n komponenter. Om vi talar om en tensor och inte anger dess rang så underförstår vi att vi talar om en andra rangens tensor. I mekaniken har ni tidigare stött på tröghetstensorn. En annan tensor som vi kommer att stöta på i denna kurs är spänningstensorn, τ_{ij}, som är kraften per areaenhet i den j:te riktningen på ett ytelement vars normalvektor pekar i den i:te riktningen. Man kan visa att tensors komponenter transformeras mellan två olika koordinatsystem enligt formeln

$$\tau'_{ij} = \tau_{mn} C_{mi} C_{nj} \, , \tag{6}$$

där vi enligt Einsteins regel summerar över både m och n. I detta uttryck är C_{ij} samma transformationsmatris som i uttrycket 4.

2 Kroneckers delta och den alternerande tensorn.

Kroneckers delta är en andra rangens tensor som definieras enligt

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &= 1 \quad \text{om} \quad i = j \, , \\ \delta_{ij} &= 0 \quad \text{om} \quad i \neq j \, . \end{aligned} \tag{7}$$

Den alternerande tensorn är en tredje rangens tensor som definieras enligt

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk} &= 1 \quad \text{om} \quad \{i,j,k\} = \{1,2,3\},\ \{2,3,1\} \text{ eller } \{3,1,2\} \, , \\ \epsilon_{ijk} &= -1 \quad \text{om} \quad \{i,j,k\} = \{1,3,2\},\ \{3,2,1\} \text{ eller } \{2,1,3\} \, , \\ \epsilon_{ijk} &= 0 \quad \text{om minst två av } i,j \text{ och } k \text{ är lika med varandra.} \end{aligned} \tag{8}$$

Följande formler är mycket användbara

$$\begin{aligned}
\epsilon_{ijk} &= \epsilon_{kij} \,, && (9)\\
\epsilon_{ijk} &= -\epsilon_{ikj} \,, && (10)\\
\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} &= \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl} \,. && (11)
\end{aligned}$$

Observera att vi i det sista uttrycket enligt Einsteins regel summerar över i som förekommer två gånger i vänsterledet.

3 Skalärprodukt och kryssprodukt

Skalärprodukten mellan två vektorer $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ och $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ kan vi skriva som

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_j v_j \,, \tag{12}$$

där vi återigen använt oss av Einsteins summationsregel. Kryssprodukten skriver vi

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2,\ u_3 v_1 - u_1 v_3,\ u_1 v_2 - u_2 v_1) \,. \tag{13}$$

Ett mycket kompakt och användbart sätt att skriva kryssprodukten är också

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v})_i = \epsilon_{ijk} u_j v_k \,. \tag{14}$$

Exempel 1.1
Visa med hjälp av Cartesisk tensornotation att

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} \,. \tag{15}$$

Lösning:

$$\begin{aligned}
&[\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})]_i = \epsilon_{ijk} A_j \epsilon_{klm} B_l C_m = \epsilon_{kij}\epsilon_{klm} A_j B_l C_m = \\
&= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) A_j B_l C_m = A_j C_j B_i - A_j B_j C_i = [(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}]_i \,, \qquad (16)
\end{aligned}$$

där vi har använt (9) och (11).

4 Gradient, divergens och rotation

Gradienten av ett skalärfält, $\phi = \phi(x, y, z)$, skriver vi som

$$\nabla\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right) \,, \tag{17}$$

där ∇ kallas för "nabla-operatorn". I traditionell vektornotation kan vi skriva nabla-operatorn som

$$\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \,. \tag{18}$$

I Cartesisk tensor notation motsvaras nabla operatorn av operatorn

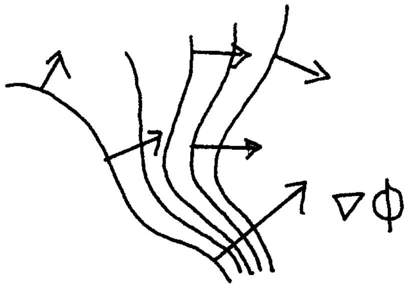

Figure 2: Gradienten, $\nabla\phi$, är vinkelrät mot isolinjerna och pekar i riktning mot växande ϕ. Ju tätare isolinjerna ligger intill varandra, desto större är gradienten.

$$\frac{\partial}{\partial x_i}, \tag{19}$$

och gradienten av ϕ kan vi skriva mycket kompakt som

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i}. \tag{20}$$

Gradienten av ett skalärfält är ett vektorfält som överallt är vinkelrätt mot fältets isolinjer, vilka är de linjer längs vilka fältet är konstant. Gradienten av ϕ pekar i riktning mot växande värden av ϕ och ju mer ϕ växer desto större är dess gradient. Ett viktigt skalärfält inom strömningsmekaniken är tryckfältet p. Tryckgradienten, som vi antingen kan beteckna med ∇p eller med $\partial p/\partial x_i$, är alltså ett vektorfält som överallt är vinkelrätt mot isobarerna och pekar i riktning mot stigande tryck. Med hjälp av gradienten kan vi definiera förändringen av ett skalärfält utefter en kurva $\mathbf{r}(s) = (x(s), y(s), z(s))$, där s är båglängden utefter kurvan. Rikningsderivatan av ϕ längs kurvan kan vi skriva som

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s} = \mathbf{e}_t \cdot \nabla\phi\,, \tag{21}$$

där $\mathbf{e}_t$ är enhetstangentvektorn längs kurvan.

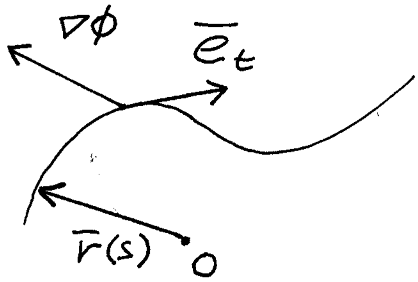

Figure 3: Förändringen av en funktion, ϕ, längs en kurva mäts med rikningsderivatan, $\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}s = \mathbf{e}_t \cdot \nabla\phi$, där s är båglängden längs kurvan och $\mathbf{e}_t$ är kurvans enhetstangentvektor.

Om vi istället opererar med nabla-operatorn på ett vektorfält $\mathbf{u}$, så får vi ett skalärt fält som kallas för divergensen av $\mathbf{u}$,

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \, . \tag{22}$$

Om vi opererar med $\nabla\times$ på $\mathbf{u}$ så får vi ett nytt vektorfält, $\nabla \times \mathbf{u}$, som kallas för rotationen av $\mathbf{u}$. En mycket användbar formel är

$$(\nabla \times \mathbf{u})_i = \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} u_k \, . \tag{23}$$

Exempel 1.2

Visa med hjälp av Cartesisk tensornotation att

a) rotationen av en gradientfält är noll,

b) divergensen av ett rotationsfält är noll.

Lösning:

a)

$$(\nabla \times \nabla\phi)_i = \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \phi}{\partial x_k} = \epsilon_{ijk} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j x_k} \, . \tag{24}$$

Både j och k är så kallade ”dummy index”. Att de båda förekommer två gånger betyder att vi ska summera över båda dessa index. Uppenbarligen spelar deras namn ingen roll. Vi hade precis lika bra kunnat använda m och n och vi kan också låta j och k byta namn. Om vi gör det så får vi

$$\epsilon_{ijk} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j x_k} = \epsilon_{ikj} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_k x_j} = -\epsilon_{ijk} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j x_k} \, , \tag{25}$$

där vi använt (10). Uttrycket i vänsterledet är alltså lika med minus sig självt och måste därför vara lika med noll.

b)

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) = \frac{\partial}{\partial x_i} \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} u_k = \epsilon_{ijk} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_j} = -\epsilon_{ijk} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_j} \, , \tag{26}$$

På samma sätt som i exempel a) har vi alltså visat att ett uttryck är lika med minus sig självt. Alltså får vi

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) = 0 \, . \tag{27}$$

Exempel 1.3

Visa med hjälp av Cartesisk tensornotation att

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \tag{28}$$

Lösning:

$$[\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})]_i = \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \epsilon_{klm} \frac{\partial}{\partial x_l} A_m = \epsilon_{kij} \epsilon_{klm} \frac{\partial^2 A_m}{\partial x_j \partial x_l} =$$

$$= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) \frac{\partial^2 A_m}{\partial x_j \partial x_l} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial A_j}{\partial x_j} - \frac{\partial^2 A_i}{\partial x_j \partial x_j} = [\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}]_i \, . \tag{29}$$

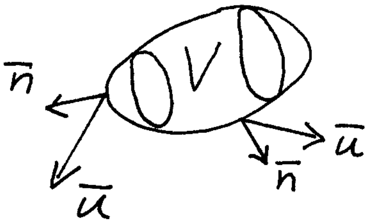

Figure 4: Integralen $\int_v \nabla\cdot\mathbf{u}\,\mathrm{d}V$ kan skrivas om som en integral av flödet, $\int_S \mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S$, över kontrollvolymens begränsningsyta.

5 Gauss sats

Med traditionell vektornotation kan vi skriva Gauss sats

$$\int_V \nabla\cdot\mathbf{u}\,\mathrm{d}V = \int_S \mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S\,, \tag{30}$$

där vänsterledet är en volymsintegral över volymen V och högerledet är en yt-integral över volymens begränsningsyta och $\mathbf{n}$ är begränsningsytans enhetsnormalvektor som pekar utåt. I Cartesisk tensornotation kan vi istället skriva Gauss sats

$$\int_V \frac{\partial u_i}{\partial x_i}\,\mathrm{d}V = \int_S u_i n_i\,\mathrm{d}S\,. \tag{31}$$

6 Cylinderkoordinater

Med hjälp av cylinderkoordinater kan ortsvektorn $\mathbf{r}$ för en punkt skrivas

$$\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r + z\mathbf{e}_z\,. \tag{32}$$

En vektor $\mathbf{u}$ kan skrivas

$$\mathbf{u} = u_r\mathbf{e}_r + u_\theta\mathbf{e}_\theta + u_z\mathbf{e}_z\,, \tag{33}$$

där $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$ och $\mathbf{e}_z$ är enhetsvektorerna i den radiella, den azimutala respektive den axiella riktningen och u_r, u_θ samt u_z är den radiella, azimutala respektive den axiella komponenten. Komponenterna är funktioner av de tre koordinaterna r, θ och z. De båda enhetsvektorerna $\mathbf{e}_r$ och $\mathbf{e}_\theta$ är funktioner av θ, d v s de vrider sig med θ. Som ni redan lärde er i den första mekanikkursen gäller följande samband

$$\frac{\partial\mathbf{e}_r}{\partial\theta} = \mathbf{e}_\theta\,, \tag{34}$$

$$\frac{\partial\mathbf{e}_\theta}{\partial\theta} = -\mathbf{e}_r\,. \tag{35}$$

I cylinderkoordinater kan nabla-operatorn skrivas

$$\nabla = \mathbf{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \mathbf{e}_z\frac{\partial}{\partial z} \tag{36}$$

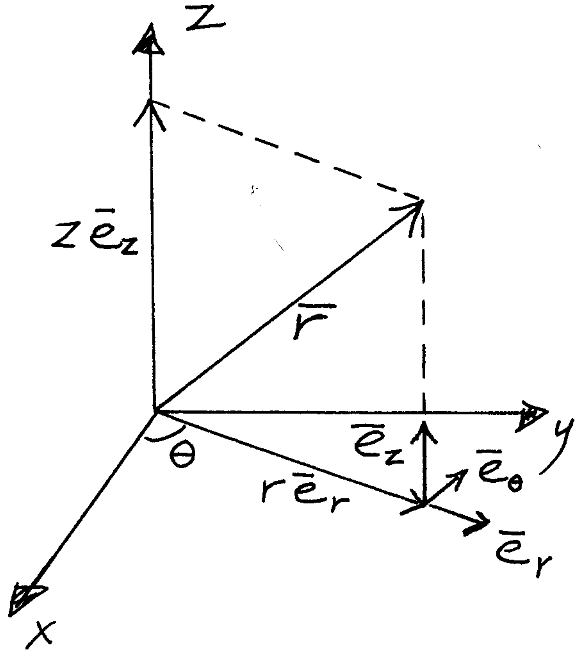

Figure 5: Uppdelning av ortsvektorn $\mathbf{r}$ i två komposanter $r\mathbf{e}_r$ och $z\mathbf{e}_z$.

Exempel 1.4

Visa att

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\,. \tag{37}$$

Lösning

$$\begin{aligned}\nabla^2\phi = \nabla\cdot\nabla\phi &= \left(\mathbf{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \mathbf{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\mathbf{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \mathbf{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\phi = \\ &= \left(\frac{\partial^2}{\partial r} + \frac{1}{r}\mathbf{e}_\theta\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial}{\partial r}\mathbf{e}_r\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi = \\ &= \left(\frac{\partial^2}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\end{aligned} \tag{38}$$

I appendix A hittar ni användbara uttryck och ekvationer i cylinderkoordinater.