Föreläsning 2.

1 Materiell derivata

Vätskor och gaser kallas med ett sammanfattande ord för fluider. I verkligheten består fluider av partiklar, d v s atomer eller molekyler. I strömningsmekaniken bortser vi från fluidens partikelstruktur och antar istället att fluidens minsta beståndsdel är betydligt större än en molekyl samtidigt som den är mycket liten i förhållande till alla makroskopiska längdskalor. Vi kallar ett sådant element för ett fluidelement och antar att vi kan bortse från att det har en inre struktur. Detta antagande kallas för kontinuumhypotesen.

Hastighetsfältet för en fluid anger vi som funktion av läget och tiden, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z, t)$. Ett fluidelements läge förändras hela tiden i en strömmande fluid. Antag att vi vill bestämma hur en viss storhet, $\phi = \phi(x, y, z, t)$, förändras med tiden då vi mäter ϕ på ett fluidelement. Vi kan t e x tänka på ϕ som temperaturen av ett visst element. Förändringen av ϕ under en litet tidsintervall δt kan vi beteckna med $\delta\phi$. Under tidsintervallet δt har fluidelementet gjort en liten förflyttning $(\delta x, \delta y, \delta z)$. För att bestämma $\delta\phi$ måste vi ta med denna förflyttning

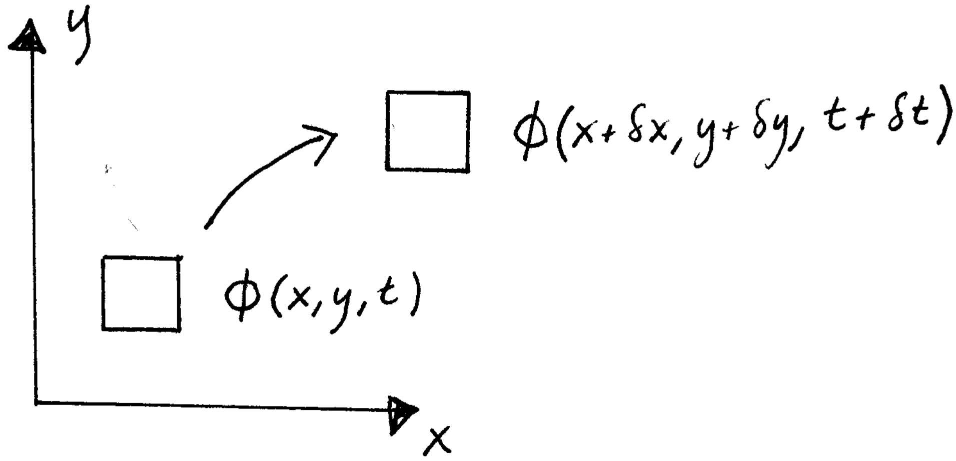

Figure 1: Den materiella derivatan av ϕ är ett mått på förändringen av ϕ mätt på ett fluidelement. Termen $\mathbf{u} \cdot \nabla\phi$ härrör från den förflyttning som en fluidelement genomgår då vi mäter förändringen av ϕ.

i beräkningen och så att säga ”följa med” elementet:

$$\delta\phi = \frac{\partial\phi}{\partial t}\delta t + \frac{\partial\phi}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\phi}{\partial z}\delta z\,. \tag{1}$$

Den materiella derivatan av ϕ definierar vi som

$$\frac{\mathrm{D}\phi}{\mathrm{D}t} = \lim_{\delta t\to 0}\frac{\delta\phi}{\delta t} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + u\frac{\partial\phi}{\partial x} + v\frac{\partial\phi}{\partial y} + w\frac{\partial\phi}{\partial z}\,, \tag{2}$$

där (u, v, w) är hastighetekomponenterna. Här har vi utnyttjat att att

$$\lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta x}{\delta t} = u\,, \quad \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta y}{\delta t} = v\,, \quad \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta z}{\delta t} = w\,. \tag{3}$$

Den materiella derivatan kan vi betrakta som en operator. Med olika beteckningssystem kan vi skriva denna operator som

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}\,, \tag{4}$$

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial}{\partial t} + u_i\frac{\partial}{\partial x_i}\,, \tag{5}$$

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\,. \tag{6}$$

Vi kan också operera med den materiella derivatan på ett vektorfält. Om vi exempelvis opererar på hastighetsfältet så får vi accelerationsfältet

$$\mathbf{a}(x, y, z, t) = \frac{\mathrm{D}\mathbf{u}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}\,. \tag{7}$$

2 Kontrollvolymer

En fix kontrollvolym, V, är en volym vars begränsningsyta inte förändras med tiden. En materiell kontrollvolym, $\mathcal{V}$, är en volym vars begränsningsyta har samma hastighet som fluiden. Man kan säga att dess begränsningsyta rör sig med fluiden. Om vi integrerar en storhet ϕ över en volym måste vi skilja på om vi integrerar över en fix eller en materiell kontrollvolym

$\int_V \phi\,\mathrm{d}V$	Integralen är över en fix volym.	(8)
$\int_{\mathcal{V}} \phi\,\mathrm{d}\mathcal{V}$	Integralen är över en materiell volym.	(9)

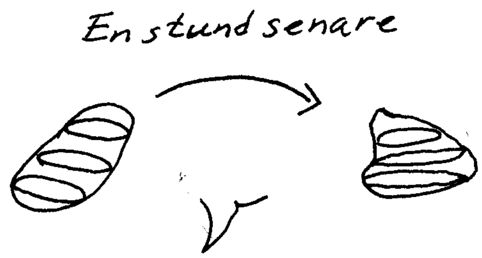

Figure 2: En materiell kontrollvolym $\mathcal{V}$ förflyttas och deformeras med fluiden.

För tidsderivatan av dessa integraler gäller

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \phi\,\mathrm{d}V = \int_V \frac{\partial\phi}{\partial t}\,\mathrm{d}V \tag{10}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathcal{V}} \phi\,\mathrm{d}\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial\phi}{\partial t}\,\mathrm{d}\mathcal{V} + \int_{\mathcal{S}} \phi\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}\mathcal{S} \tag{11}$$

där $\mathbf{n}$ är kontrollvolymens utåtriktade enhetsnormalvektor och S är dess begränsningsyta. Den sista termen i den andra ekvationen beskriver tidsförändringen som uppkommer på grund av att den materiella kontrollvolymens begränsningsyta rör sig med fluidens hastighet $\mathbf{u}$. Enligt Gauss sats så kan vi skriva om den andra ekvationen som

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathcal{V}} \phi \,\mathrm{d}\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi \mathbf{u}) \right) \mathrm{d}\mathcal{V} \tag{12}$$

Ekvation (12) kallas ibland för Reynolds transportteorem.

2.1 Inkompressibel fluid

En inkompressibel fluid är en fluid för vilken volymsmåttet (eller volymen) av en godtycklig materiell kontrollvolym inte förändras med tiden:

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{V}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathcal{V}} \mathrm{d}\mathcal{V} = \int_{S} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \,\mathrm{d}S = \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \mathbf{u} \,\mathrm{d}\mathcal{V} = 0 \;. \tag{13}$$

Betrakta en liten kontrollvolym kring en punkt P. Om volymen är tillräckligt liten så kan inte integranden $\nabla \cdot \mathbf{u}$ ändra tecken över volymen. Om integranden inte ändrar tecken och integralen är noll så måste också integranden vara identiskt noll. Alltså har vi att

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \,, \tag{14}$$

för en inkompressibel fluid.

Vanliga vätskor kan normalt behandlas som inkompressibla fluider och detta gäller, kanske något förvånande, också för de flesta gaser så som luft, förutsatt att hastigheten i strömningsfältet är liten i förhållande till ljudhastigheten. Om u är en typisk hastighet i strömningsfältet och a ljudhastigheten så definieras Machtalet som $M = u/a$. Så länge $M \ll 1$ kan vi anta att (14) gäller med god noggrannhet.

3 Strömlinjer och strömfunktionen

En strömlinje är en linje vars tangent är parallell med hastighetsfältet. Om $d\mathbf{r} = (dx, dy)$ är en liten förflyttning längs en strömlinje i ett tvådimensionellt hastighetsfält, $\mathbf{u} = (u, v)$, där u och v är fältets x- och y-komponent, så gäller alltså (se figur 3)

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} \,. \tag{15}$$

De banor utefter vilka fluidelementen förflyttar sig kallas partikelbanor. För ett stationärt hastighetsfält är strömlinjerna också partikelbanor, men för ett fält som inte är stationärt så gäller inte detta.

I det tvådimensionella fallet kan vi skriva (14)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \,. \tag{16}$$

Detta samband ger oss möjligheten att uttrycka hastighetskomponenterna i termer av en funktion, Ψ, som kallas för strömfunktionen. Den definieras av följande

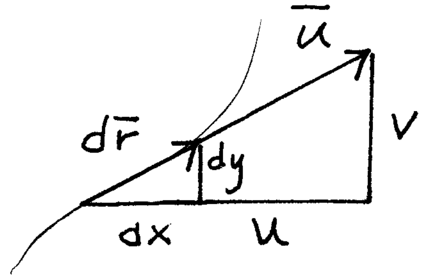

Figure 3: Ekvationen (15) för strömlinjerna kan härledas genom att betrakta likformiga trianglar.

samband

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}. \tag{17}$$

Vi betraktar nu förändringen, $\mathrm{d}\Psi$, av Ψ längs en strömlinje. Som förut är förflyttningen längs strömlinjen (dx, dy). Enligt (15) och (17) får vi

$$\mathrm{d}\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial \Psi}{\partial y}\mathrm{d}y = -v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y = -u\mathrm{d}y + u\mathrm{d}y = 0\,. \tag{18}$$

Strömfunktionen är således konstant längs en strömlinje. Alltså är strömlinjerna strömfunktionens isolinjer

$$\Psi = \text{Konstant}\,, \tag{19}$$

med olika konstanter för olika strömlinjer.

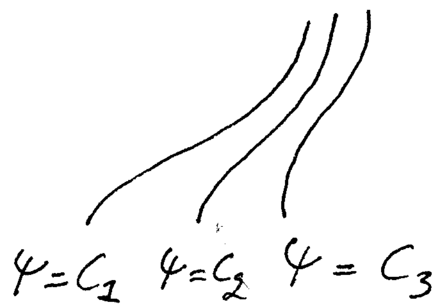

Figure 4: Strömlinjerna är isolinjer till strömfunktionen.

Exempel 2.1

Beräkna strömlinjerna för hastighetsfältet $(u, v, w) = (\alpha x, -\alpha y, 0)$.

Lösning

Strömningen är tvådimensionell och dessutom inkompressibel, eftersom

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \alpha - \alpha = 0\,. \tag{20}$$

Strömfunktionen kan skrivas

$$\Psi = \alpha x y \,. \tag{21}$$

För $x \neq 0$ så är alltså ekvationen för strömlinjerna

$$y = \frac{C}{x} \,, \tag{22}$$

där konstanten C är olika för olika strömlinjer. Det är också lätt att se att y-axeln är en strömlinje. I figur 5 ser vi strömlinjerna. I origo är hastigheten noll (båda komponenterna är noll). En sådan punkt kallas en stagnationspunkt.

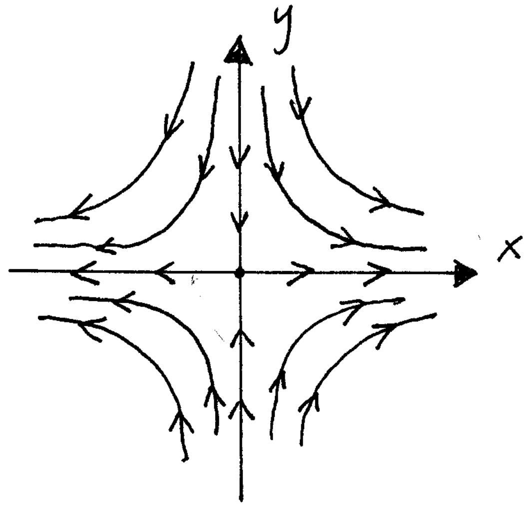

Figure 5: Strömlinjer för hastighetsfältet i exempel 2.1.

4 Kontinuitetsekvationen

Densiteten av en fluid är en funktion av rumskoordinaterna och tiden, $\rho = \rho(x, y, z, t)$. Densiteten är alltså ett skalärt fält. Massan av en materiell kontrollvolym

$$\int_{\mathcal{V}} \rho \, \mathrm{d}\mathcal{V} \,, \tag{23}$$

måste vara konstant i tiden, eftersom ingen fluid strömmar ut eller in genom kontrollvolymens begränsningsyta. Enligt ekvation (12) har vi alltså

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mathcal{V}} \rho \, \mathrm{d}\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \right) \mathrm{d}\mathcal{V} = 0 \,. \tag{24}$$

Eftersom detta samband gäller för en godtyckligt liten kontrollvolym som vi kan placera var som helst i fluiden så måste integranden vara identiskt noll överallt. Alltså har vi att

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \,. \tag{25}$$

Denna ekvation kallas kontinuitetsekvationen och kan också skrivas

$$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} + \rho\nabla \cdot \mathbf{u} = 0\,. \tag{26}$$

För en inkompressibel fluid gäller således

$$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} = 0\,. \tag{27}$$

I praktiken så kan vi anta att ρ är konstant i både tid och rum för en inkompressibel fluid.

Kontinuitetsekvationen kan också härledas genom att vi betraktar en fix kontrollvolym med massan

$$\int_V \rho\,\mathrm{d}V \tag{28}$$

Massökningen måste vara lika med det totala massflödet in genom volymens begränsningsyta. Detta ger

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho\,\mathrm{d}V = -\int_S \rho\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S\,, \tag{29}$$

där minustecknet kan förstås mot bakgrund av att $\mathbf{n}$ är enhetsnormalvektorn som pekar ut från begränsningsytan S (se figur 6) Om vi samlar båda termerna till

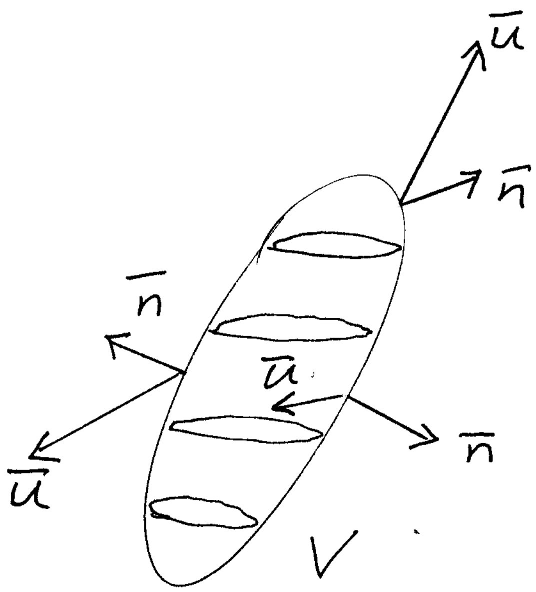

Figure 6: Massflödet **in** i en fix kontrollvolym är lika med $-\int_S \rho\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S$.

vänsterledet och använder oss av ekvation (10) samt Gauss sats så får vi

$$\int_V \left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{u})\right)\mathrm{d}V = 0\,. \tag{30}$$

Eftersom detta gäller för en godtyckligt liten kontrollvolym som vi kan placera var som helst i fluiden så måste integranden vara indentiskt noll, vilket återigen ger oss kontinuitetsekvationen (25).

Exempel 2.2

En inkompressibel fluid strömmar genom ett avsmalnande rör, enligt figur 7. Hastigheten vid inloppet är u_1. Rörets tvärsnittsarea är A_1 vid inloppet och A_2 vid utloppet. Bestäm hastigheten vid utloppet.

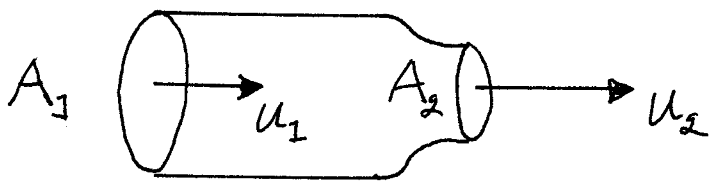

Figure 7: Volymsflödet vid utloppet måste vara lika med volymsflödet vid inloppet.

Lösning:

Massflödet in i röret måste vara lika med massflödet ut ur röret och eftersom fluiden är inkompressibel så gäller detta också för volymsflödet. Alltså har vi att

$$\int_{in} u_1 \,\mathrm{d}S = \int_{ut} u_2 \,\mathrm{d}S \quad \Rightarrow \quad u_1 A_1 = u_2 A_2 \quad \Rightarrow \quad u_2 = \frac{A_1}{A_2} u_1 \,. \tag{31}$$

5 En användbar integralsats

Med hjälp av Reynolds transportteorem (12) och kontinuitetsekvationen får vi

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mathcal{V}} \rho\phi \,\mathrm{d}\mathcal{V} &= \int_{\mathcal{V}} \left(\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\phi\mathbf{u}) \right) \mathrm{d}\mathcal{V} = \\
\int_{\mathcal{V}} &\left(\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho\phi u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho\phi v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho\phi w) \right) \mathrm{d}\mathcal{V} \\
&= \int_{\mathcal{V}} \phi \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) \right) \mathrm{d}\mathcal{V} \\
+ \int_{\mathcal{V}} \rho &\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + u\frac{\partial \phi}{\partial x} + v\frac{\partial \phi}{\partial y} + w\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \mathrm{d}\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \rho \frac{\mathrm{D}\phi}{\mathrm{D}t} \,\mathrm{d}\mathcal{V} \,.
\end{aligned} \tag{32}$$

Sambandet (32) gäller för ett godtyckligt skalärt fält ϕ och dessutom för ett godtyckligt vektorfält $\mathbf{A}$. Om vi tar bort alla mellanled får vi alltså

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mathcal{V}} \rho\phi \,\mathrm{d}\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \rho \frac{\mathrm{D}\phi}{\mathrm{D}t} \,\mathrm{d}\mathcal{V} \,, \tag{33}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mathcal{V}} \rho\mathbf{A} \,\mathrm{d}\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \rho \frac{\mathrm{D}\mathbf{A}}{\mathrm{D}t} \,\mathrm{d}\mathcal{V} \,. \tag{34}$$