Föreläsning 5.

1 Navier-Stokes ekvationer

I förra föreläsningen härledde vi momentekvationen

$$\frac{\mathrm{D}u_j}{\mathrm{D}t} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i} + g_j \,. \tag{1}$$

Vi konstaterade också att spänningstensorn för en inviskös fluid kan skrivas som $\tau_{ij} = -p\delta_{ij}$. I de flesta realistiska fall så är det en alltför grov idealisering att bortse från friktionskrafter i fluiden. Vi behöver därför ett uttryck för spänningstensorn som även inbegriper sådana krafter. Det är ett rimligt antagande att friktionskrafter uppkommer i en fluid då dess olika delar töjs och att ju mer ett fluidelement töjs desto större är de friktionskrafter som uppkommer. För en inkompressibel fluid kan vi därför anta att spänningstensorn förutom trycktermen innehåller en term som är proportionell mot töjningstensorn. Vi kan således skriva

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \;, \tag{2}$$

där μ är en materialkonstant som kallas viskositeten. Viskositeten är olika för olika fluider och kan också variera något med temperatur och tryck. En ekvation av typen (2) som relaterar spänningstensorn till töjningstensorn kallas en konstitutiv relation och ekvation (2) är den enklaste konstitutiva relationen som säger att spänningstensorn är linjärt beroende av töjningstensorn. En fluid som uppfyller denna relation kallas en Newtonsk fluid. Nästan alla vanliga fluider inklusive vatten och luft kan med mycket stor noggrannhet behandlas som Newtonska fluider. Med sambandet (2) får vi

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(-p\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right) = -\frac{\partial p}{\partial x_j} + \mu\frac{\partial u_j}{\partial x_i \partial x_i}\,, \tag{3}$$

där vi har antagit att fluiden är inkompressibel. Vi inför nu den *kinematiska viskositeten*

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}\,, \tag{4}$$

sätter in (3) i momentekvationen (1) och får då

$$\frac{\mathrm{D}u_j}{\mathrm{D}t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_j} + g_j + \nu\frac{\partial u_j}{\partial x_i \partial x_i}\,. \tag{5}$$

Detta utgör tre ekvationer ($j = 1, 2, 3$) som kallas Navier-Stokes ekvationer. I vektorform kan vi skriva Navier-Stokes ekvationer tillsammans med kontinuitetsekvationen för en inkompressibel fluid

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{g} + \nu\nabla^2\mathbf{u}\,, \tag{6}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = 0\,. \tag{7}$$

I många tillämpningar i vilka gravitationskraften inte driver strömningen kommer gravitationen in enbart genom att den sätter upp ett bakomliggande hydrostatiskt tryckfält. Trycket kan då delas upp i två delar

$$p = \tilde{p} + p' \,, \tag{8}$$

där den första delen befinner sig i hydrostatisk balans

$$0 = -\nabla \tilde{p} + \rho \mathbf{g} \,. \tag{9}$$

I sådana tillämpningar kan gravitationskraften elimineras ur ekvationerna genom att man ersätter det totala trycket p med den del, p', som beskriver avvikelsen från hydrostatisk balans. För denna del använder man dock vanligtvis också beteckningen p, om inget annat sägs. Vi skriver nu ekvationerna i Cartesiska koordinater utan att inkludera gravitationskraften,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u \,, \tag{10}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu \nabla^2 v \,, \tag{11}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 w \,, \tag{12}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \,. \tag{13}$$

I appendix A hittar ni Navier-Stokes ekvationer i cylinderkoordinater.

Randvillkoret för Navier-Stokes ekvationer är att alla hastighetetskomponenter är noll på en fast rand. Vi kan jämföra detta med randvillkoret för Eulers ekvationer enligt vilket endast den hastighetskomponent som är normal mot randen måste vara noll, så att fluiden inte penetrerar randen, medan den tangentiella hastighetskomponenten inte behöver vara noll. En inviskös fluid är alltså fri att glida längs en rand, medan en viskös fluid inte kan glida längs randen. På engelska kallas randvillkoret för en viskös fluid för ”the no-slip condition”. På svenska skulle vi kunna säga ”vidhäftningsvillkoret” eller möjligen ”icke-glidningsvillkoret”. Mer generellt säger vidhäftningsvillkoret att fluiden på randen ska ha samma hastighet som randen, vilket gäller både för fasta och rörliga ränder.

2 Några exakta lösningar

Exempel 5.1 Couetteströmning

Beräkna hastighetsfältet för en fluid mellan två mycket långa plana plattor av vilken den övre plattan rör sig med hastigheten U och den undre plattan står stilla. Avståndent mellan plattorna är h. Viskositeten är ν, densiteten är ρ och tryckgradienten är noll. Strömningen är stationär och fullt utbildad, vilket innebär att vi betraktar den långt från inloppet och utloppet. Beräkna också volymsflödet (per längdenhet i z-led) och spänningen på väggarna. Rita en figur där väggarna är frilagda från fluiden och indikera spänningen på väggen och spänningen på fluiden.

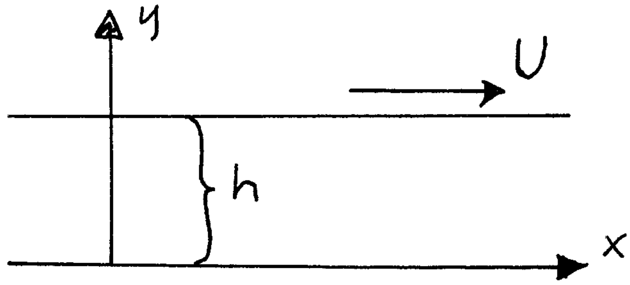

Figure 1: Couetteströmning är den fullt utbildade strömningen mellan två långa parallella plattor varav den ena rör sig med hastigheten U och den andra står stilla.

Lösning

Eftersom strömningen är fullt utbildad har vi att

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0\,. \tag{14}$$

Alltså har vi att

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad v = C\,. \tag{15}$$

Randvillkoret $v = 0$ på plattorna ger att $v = 0$. Momentekvationen i x-led kan skrivas

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\,, \tag{16}$$

Den första termen i vänsterledet är noll eftersom strömningen är stationär, den andra termen är noll på grund av (14) och den tredje termen är noll eftersom $v = 0$. Den första termen i högerledet är noll eftersom tryckgradienten är noll och den andra termen är noll på grund av (14). Alltså får vi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad u = Ay + B\,, \tag{17}$$

där A och B är integrationskonstanter. Randvillkoren ger

$$u(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0 \quad \text{och} \quad u(h) = U \quad \Rightarrow \quad A = \frac{U}{h}\,. \tag{18}$$

Hastighetsfältet ges alltså av

$$u = \frac{U}{h}y\,. \tag{19}$$

Volymsflödet (per längdenehet i z-led) är

$$q = \int_0^h u\,\mathrm{d}y = \int_0^h \frac{U}{h}y\,\mathrm{d} = \frac{1}{2}Uh\,. \tag{20}$$

Eftersom hastigheten är linjär i y är skjuvspänningen konstant. Vi har

$$\tau = \rho\nu\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\rho\nu U}{h}\,. \tag{21}$$

I figur 2 ser vi riktningen av spänningen på fluiden och på väggarna.

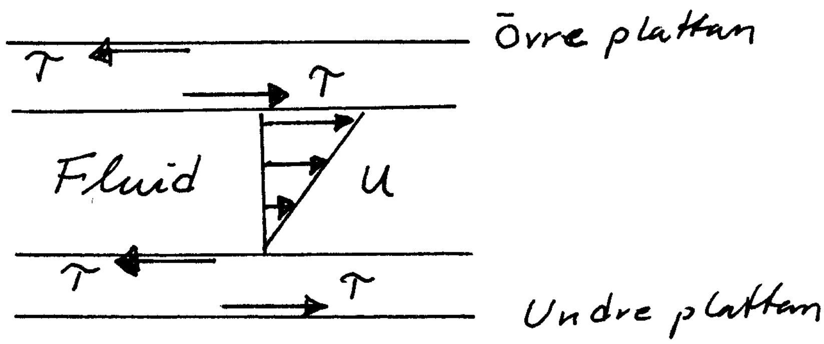

Figure 2: Den övre plattan drar med sig fluiden som bromsar plattan. Den undre plattan bromsar fluiden som "vill dra med sig" plattan.

Exempel 5.2 Poiseuilleströmning

Beräkna hastighetsfältet för en fluid mellan två mycket långa plana plattor som båda står stilla. Avståndent mellan plattorna är h. Viskositeten är ν, densiteten är ρ och tryckgradienten längs plattorna är konstant, $-\mathrm{d}p/\mathrm{d}x = K$. Strömningen är stationär och fullt utbildad. Beräkna också volymsflödet (per längdenhet i z-led) och spänningen på väggarna. Rita en figur där väggarna är frilagda från fluiden och indikera spänningen på väggen och spänningen på fluiden.

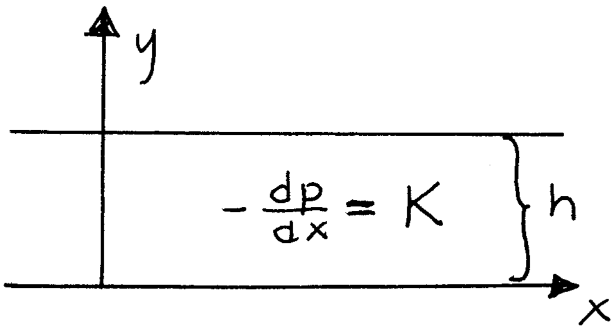

Figure 3: Poiseuilleströmning är strömningen som drivs av en konstant tryckgradient mellan två plana plattor.

Lösning

Liksom i förra exemplet får vi att $v = 0$. I likhet med förra exemplet så försvinner de flesta termer från momentekvationen. Tryckgradienten är dock nollskild. Alltså får vi

$$0 = \frac{1}{\rho}K + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{K}{\mu} \quad \Rightarrow \quad u = -\frac{1}{2}\frac{K}{\mu}y^2 + Ay + B\,, \qquad (22)$$

där A och B är två integrationskonstanter. Randvillkoren ger nu

$$u(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0 \;\text{ och }\; u(h) = 0 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{2}\frac{K}{\mu}h\,. \tag{23}$$

Hastighetsfältet ges alltså av

$$u = \frac{1}{2}\frac{K}{\mu}y(h-y)\,. \tag{24}$$

Volymsflödet (per längdenhet i z-led) ges av

$$q = \int_0^h \frac{1}{2}\frac{K}{\mu}y(h-y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{12}\frac{K}{\mu}h^3\,. \tag{25}$$

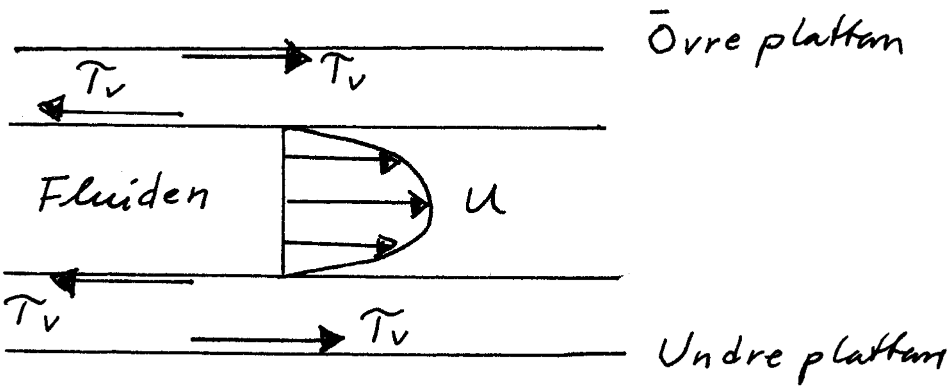

Figure 4: Fluiden "vill dra med sig" plattorna och plattorna bromsar fluiden.

Vi beräknar väggskjuvspänningen med hjälp av två olika metoder, en rent matematisk och en mer fysikalisk. Enligt den förstmetoden beräknar vi spänningen i x-led på en yta vars enhetsnormalvektor pekar i y-riktningen som

$$\tau_{yx} = 2\mu e_{yx} = \mu\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2}K\left(h-2y\right)\,. \tag{26}$$

Den undre plattan har en enhetsnormalriktning som pekar i positiv $y-$ led. Därför är spänningen på den undre plattan

$$\tau_v = \tau_{yx}\big|_{y=0} = \frac{1}{2}Kh\,. \tag{27}$$

Att spänningen här är positiv betyder att den är riktad i positiv x-led. Den övre plattan har en enhetsnormalvektor som pekar i negativ y-led. Därför är spänningen på den övre plattan

$$\tau_v = -\tau_{yx}\big|_{y=h} = \frac{1}{2}Kh\,. \tag{28}$$

Föga förvånande är spänningen på den övre plattan densamma som på den undre plattan, till både storlek och riktning. Enligt den mer fysikaliska metoden så bestämmer vi först riktningen eller tecknet av τ_v genom vår fysikaliska intuition. Det är uppenbart att fluiden "vill dra med sig" plattorna, varför τ_v är positiv. Det är också uppenbart att spänningen är densamma på båda plattorna. Alltså får vi

$$\tau_v = \mu \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} = \frac{1}{2} K h \tag{29}$$

på båda plattorna.