Om att räkna med tal som inte finns

Lars Nystedt

Föredrag vid gymnasistdagen i matematik 23 nov 1988

Gud skapade de naturliga talen.
De andra har vi gjort själva.
Leopold Kronecker (1823–1891)

När jag gick i skolan fick jag lära mig att de s k imaginära talen kallades så, därför att man en gång ansåg att de inte fanns. Men man hade börjat räkna med dem ändå, fast de inte fanns, och kallade dem då för tänkta – imaginära – tal, till skillnad från de riktiga – reella – talen som verkligen fanns. Utgångspunkten för de imaginära talen är detta märkliga "tal" som betecknas med i, och som multiplicerat med sig självt skulle bli -1. Det var ju lätt för mig att kontrollera att det inte finns något sådant tal. De enda tänkbara var ju $+1$ och -1, och för bägge gällde att i kvadrat blev de $+1$. Jag minns fortfarande den hisnande känslan när jag räknade med dessa tal som egentligen inte fanns.

Det har emellertid hänt flera gånger att man i matematiken mött "tal som inte finns". T ex visste de grekiska pythagoréerna att om man konstruerade en kvadrat med sidan 1, så hade mätetalet för diagonalen den egenskapen att om man tog talet i kvadrat blev resultatet 2. Men de kände bara till de rationella talen, och man kunde bevisa att det fanns inget tal sådant att dess kvadrat blev 2. Detta var ett stort problem för dem, för de trodde att allting var tal, och här fanns nu något som bevisligen inte var ett tal. Det finns en tradition att en av pythagoréerna som hette Hippasus blev mördad för att han avslöjade detta för utomstående. Senare lärde sig dock grekerna att behandla vissa irrationella tal.

När jag nu skall tala om "tal som inte finns" har jag valt de negativa talen. Jag har valt dem av två skäl. Dels därför att ni alla kan räkna med de negativa talen. (Det blir alltså ingen ny och svår matematik. I stället kommer jag att be er "tänka bort" allt ni kan om negativa tal.) Dels har de utgjort ett enormt problem för matematikerna, som vi snart skall se. När vi väl har "tänkt bort" de negativa talen, så att de inte "finns", skall vi hitta på ett sätt att införa dem. Vi skall också se hur vi kan lära oss att räkna med dem.

Negativa tal är för oss idag inga märkvärdigheter. Om man ställer följande problem: Det är nu $+4$ grader. Om temperaturen sjunker 6 grader, hur varmt blir det då? Ingen tvekar om svaret. Det blir -2 grader. Eller följande problem: En finansvalp har 4 miljoner och förlorar 6 miljoner på spekulationer, hur mycket pengar har han då? Svar: Han har -2 miljoner, dvs han har en skuld på 2 miljoner.

Men det finns andra situationer där negativa tal närmast förefaller att vara ett dåligt skämt. För en del år sedan fanns i TV en populär serie som hette Familjen Flinta. En dag har Barney Granit hört talas om negativa tal och pratar med Fred Flinta om saken. Jaha, säger Fred, då radar vi upp 4 äpplen här på bordet, och sen äter vi upp 6 av dem. Sedan tittar vi på de -2 äpplen som är kvar. Förresten kan vi fortsätta att äta upp -7 äpplen till av de där -2. Och plötsligt ligger det 5 äpplen framför oss på bordet. Det här blir det ju inget vett med.

Några dagar senare har Fred fått ett så arbetsamt jobb. Han skall tillverka 12 stycken stenyxor. Barney har ett förslag. Om Fred tillverkar -3 stycken stenyxor om dagen, och håller på med det i -4 dagar; då har han, hokus pokus, tillverkat 12 stenyxor. Fred Flinta undrar om det inte finns en hake någonstans.

De negativa talen har inte alltid ”funnits”. De infördes av bl a indierna på åttahundratalet just för att beteckna skulder. Även kineserna kände till dem. De skrev dem med svart tusch, till skillnad från de vanliga talen som skrevs med rött tusch.

Men de negativa talen utgjorde ett svårt problem. Under århundraden vägrade många matematiker att befatta sig vare sig med dem eller med ekvationer som hade negativa rötter. Ännu 1759 skriver en matematiker, Francis Masères, om negativa tal, att de endast krånglar till förhållanden som annars är klara och enkla att förstå, och att det vore önskvärt om man aldrig hade kommit på dem.

År 1831 behandlade Augustus de Morgan följande problem:

En far är 56 år, hans son 29. Om hur många år blir fadern dubbelt så gammal som sonen? Detta problem leder till ekvationen

$$56 + x = 2 \cdot (29 + x)$$

som har lösningen $x = -2$. Vi tycker kanske inte att det är svårt att tolka resultatet, men de Morgan anser att resultatet och ekvationen är absurda just för att roten är negativ. Men han fortsätter att säga att om man ändrar frågeställningen till ”*för hur många år sedan* var fadern dubbelt så gammal som sonen?”, då blir ekvationen

$$56 - x = 2 \cdot (29 - x)$$

och den har roten $x = 2$, vilket är helt ok.

Vi skall inte tro att de Morgan var något dumhuvud. Tvärtom berodde hans tvekan inför de negativa talen på att han bättre än de flesta insåg svårigheterna. Att en så framstående matematiker ännu för 150 år sedan hade svårigheter med de negativa talen visar vilket formidabelt svårt problem de utgjorde. Vi kan knappast föreställa oss hur otroligt svårt det har varit.

Nu skall vi alltså ställa oss på familjen Flintas matematiska nivå. För oss är tal något som man räknar stenyxor och äpplen med. Matematiken är för oss en experimentell vetenskap, och vi inser att $4 + 2 = 6$ genom att lägga upp först 4 äpplen och sedan 2 till och räkna hur många vi har tillsammans. Vi känner också till talet 0. Det är när vi inte lägger upp något äpple alls. Vi kan de fyra räknesätten med de naturliga talen, så länge resultaten inte blir orimliga. Det finns vissa räkneoperationer som inte går att utföra, t ex $4 - 6$.

Negativa tal finns inte för oss, eftersom det är absurt med -2 äpplen.

Vi känner till ekvationer: Följande problem: ”Jag har gjort 4 stenyxor; hur många yxor till behöver jag göra för att ha gjort 6 yxor?” leder till ekvationen $4 + x = 6$.

Om nu någon skulle komma med den s k kommutativa lagen, och påstå, att för alla tal a och b gäller att

$$a+b=b+a$$

och

$$a\cdot b=b\cdot a,$$

så skulle vi förmodligen inte fråga hur man kan veta det, utan snarare vad man har för glädje av att veta det. (Det minns jag att jag själv har frågat, men jag minns inte vad jag fick för svar.)

Det var ju så i äldre tid att matematiken var rent praktisk. Gamla handskrifter i matematik talade endast om *hur* man skulle göra för att lösa ett problem; inte alls *varför* detta sätt ledde fram till en lösning. Det var grekerna som började intressera sig för den senare frågan. Euklides *Elementa* är en milstolpe i människans intellektuella historia även därför att det är en av de första böcker där det förekommer bevis.

Men antag att vi kan intressera Fred och Barney för den kommutativa lagen, och hur man kan veta att den är sann. Den frågan är svår. Vi kan visserligen kontrollera att $4+5=5+4$ och att $6+2=2+6$ osv, men hur många par av tal a och b vi än kontrollerar, så finns det kvar par som vi inte har kontrollerat, och för vilka kommutativa lagen kanske inte gäller.

Men låt oss göra så här: Vi kommer överens om att $a+b$ skall räknas från vänster till höger. $a+b$ betyder att vi har lagt ut en rad med a st yxor framför oss från vänster till höger. Därefter fyller vi på med b st yxor ut åt höger. Då ligger det $a+b$ yxor i den raden. Måla nu ett rött kryss på var och en av de första a yxorna, och sedan ett grönt kryss på var och en av de senare.

Om vi nu kliver över yxraden och tittar på den från andra hållet kommer vi att se (från vänster till höger) först b stycken gröna yxor och sedan a stycken röda, dvs $b+a$ stycken. Men det måste ju vara lika många yxor som förut! Alltså gäller att $a+b=b+a$.

Likadant med multiplikation. Vi kommer överens om att $a\cdot b$ skall betyda att vi lägger ut ett rektangulärt mönster med stenyxor framför oss. Vi tar a stycken rader med b yxor i varje rad. Det blir $a\cdot b$ yxor. Om vi sedan tittar på detta från sidan blir det i stället b stycken rader med a yxor i varje rad, dvs $b\cdot a$ stycken yxor. Alltså måste $a\cdot b=b\cdot a$.

Den andra frågan: vad vi har för glädje av att veta detta? vill jag dröja med.

Låt oss anta, att vi har blivit intresserade av vilka ytterligare räknelagar som gäller.

Först konstaterar vi emellertid att den kommutativa lagen inte gäller för subtraktion eller division. $6-4\neq 4-6$. Tvärtom är det bara det ena ledet som går att utföra. Det andra ledet blir meningslöst.

Vi har den associativa lagen:

$$(a+b)+c=a+(b+c) \quad \text{t ex } (4+5)+6=4+(5+6);$$
$$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c) \quad \text{t ex } (4\cdot 5)\cdot 6=4\cdot(5\cdot 6);$$

Inte heller den associativa lagen gäller för subtraktion: $(8-5)-2\neq 8-(5-2)$.

Däremot gäller att

$$(a+b)-c=a+(b-c)$$

om båda leden har en mening.

Vi kan ställa samma två frågor om den associativa lagen som om den kommutativa, nämligen hur vi kan veta att den är sann, samt vad vi har för glädje av att veta det. Emellertid är det lättare att förstå vitsen med den associativa lagen, eftersom det är den som gör att vi kan skriva $4 + 5 + 6$ utan att specificera om det är $4 + 5$ som skall göras först, eller om det är $5 + 6$. Vi kan ju bara göra en addition åt gången.

En sak vi bör notera är att dessa lagar inte bara gäller för två respektive tre element. Genom att kombinera den kommutativa och den associativa lagen flera gånger kan vi visa att t ex

$$a + b + c + d = d + b + a + c$$

och

$$(a + b) + (c + d) = (a + (b + c)) + d.$$

Vi bör även nämna de distributiva lagarna:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c;$$
$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$$

Två tal har en alldeles speciell ställning, nämligen 0 och 1.

$a + 0 = a$ för alla a;
$a \cdot 1 = a$ för alla a;
$a \cdot 0 = 0$ för alla a.

Vi säger att 0 är en additiv enhet och 1 är en multiplikativ enhet.

Likhetstecknet måste vi också säga några ord om.

$x = y$ medför $y = x$;
$x = y$ och $y = z$ medför $x = z$.

Detta kallas för den transitiva lagen. Euklides uttryckte det så: De som äro lika med ett och samma äro sinsemellan lika. (Fast på grekiska förstås.)

För likheter gäller även att

$x = y$ medför $x + a = y + a$ för alla a;
$x = y$ medför $x - a = y - a$ för alla a där detta har en mening.

Härur följer den s k kancellationslagen eller strykningslagen:

$x + a = y + a$ medför att $x = y$,

ty $x + a = y + a$ medför $(x + a) - a = (y + a) - a$, dvs $x + (a - a) = y + (a - a)$, och $a - a = 0$. Här har vi faktiskt glädje av den associativa lagen. Den transitiva lagen har vi använt flera gånger.

Det är bl a detta man använder sig av när man löser ekvationer. Ett exempel:

$$x - 4 = 8.$$

Vi skriver $x - 4 + 4 = 8 + 4$, och får $x = 12$.

Många elever lär sig det här som att ”man flyttar över och byter tecken”. De glömmer därvid vad man i själva verket gör.

Låt oss nu se på en omöjlig ekvation:

$$x + 2 = 0.$$

Det finns uppenbarligen inget tal som löser den ekvationen. Men liksom Alexander den store en gång löste den gordiska knuten med ett enda svärdshugg, så löser vi ekvationen genom att hitta på ett "nytt" tal, som har just den egenskapen att den är rot till den omöjliga ekvationen. Vi tecknar det talet $2^\wedge$.

Observera att det enda vi vet om $2^\wedge$ är att $2^\wedge + 2 = 0$, och motsvarande för $0^\wedge$, $1^\wedge$, $3^\wedge$, $4^\wedge$ osv. De här är naturligtvis inga "riktiga" tal, och vi kommer överens om att kalla dem för "onaturliga" tal till skillnad från de riktiga, de "naturliga" talen.

I skolan lär vi oss att kalla dem för "negativa" tal. Namnet kommer från latinets *negare* som betyder förneka, upphäva. $2^\wedge$ skulle alltså vara det tal som upphäver 2, dvs $2^\wedge + 2 = 0$.

Nu kommer vi till en viktig fråga: Hur skall vi kunna räkna med de nya talen? Hur skall vi veta vad $2^\wedge + 4^\wedge$ blir? Eller $3^\wedge \cdot 4^\wedge$? Vi kan ju inte lägga upp $2^\wedge$ äpplen och $4^\wedge$ äpplen och räkna ihop. Inte heller lägga upp $3^\wedge$ rader med $4^\wedge$ yxor i varje rad. Detta är en svår fråga.

Låt oss i stället börja med något betydligt enklare. Vi bestämmer oss för att de nya talen skall lyda samma lagar som de gamla talen, dvs de kommutativa och andra lagar som vi har skrivit upp ovan. Det kan ju tyckas vara ganska ointressant att bestämma att $2^\wedge + 4^\wedge = 4^\wedge + 2^\wedge$, när vi ändå inte vet varken vad höger eller vänster led blir. Men vi får i alla fall som ett första resultat, att $2^\wedge + 2 = 2 + 2^\wedge = 0$.

Egentligen är det ganska naturligt att lagarna även skall gälla de onaturliga talen. Vi kan göra den liknelsen att matematiken är ett land, där de infödda invånarna är de naturliga talen och de negativa talen är invandrare. Invandrarna bör då t ex lyda samma trafikregler som de infödda. Hur skulle det bli om vi stadgade att infödda kör högertrafik, under det att invandrare skall köra vänstertrafik?

Man skulle kunna tro att vi behöver uppfinna ännu flera tal, t ex ett tal $2^{\wedge\wedge}$ som skulle uppfylla $2^{\wedge\wedge} + 2^\wedge = 0$, och sedan ett som uppfyllde $2^{\wedge\wedge\wedge} + 2^{\wedge\wedge} = 0$, osv. Men tack vare kancellationslagen får vi att $2^{\wedge\wedge} + 2^\wedge = 0 = 2^\wedge + 2 = 2 + 2^\wedge$ medför att $2^{\wedge\wedge} = 2$. $2^{\wedge\wedge}$ och $2^{\wedge\wedge\wedge}$ osv är alltså onödiga. Vi upptäcker också att $0^\wedge = 0$.

Nu visar det sig, ganska förvånande, att vi kan beräkna t ex $3^\wedge + 4^\wedge$. Vi vet ju, att $3 + 3^\wedge = 0$ och att $4 + 4^\wedge = 0$. Vi får då att $0 + 0 = (3 + 3^\wedge) + (4 + 4^\wedge) = 3 + (3^\wedge + 4) + 4^\wedge = 3 + (4 + 3^\wedge) + 4^\wedge = (3 + 4) + (3^\wedge + 4^\wedge) = 7 + (3^\wedge + 4^\wedge)$, dvs $7 + (3^\wedge + 4^\wedge) = 0$.

Men $7 + 7^\wedge = 0$. Kancellationslagen ger då att $3^\wedge + 4^\wedge = 7^\wedge$. Vi hade ju bestämt att kommutativa och associativa lagen skulle gälla även för de "onaturliga" talen, och det räckte för att vi skulle kunna räkna ut att $3^\wedge + 4^\wedge = 7^\wedge$. Det tycker jag själv är ett ganska bra svar på frågan: "Vad kan man ha för nytta av den kommutativa lagen?"

Låt oss nu jämföra de båda uttrycken "$6 - 4$" och "$6 + 4^\wedge$". Vi ser att det senare blir $(2 + 4) + 4^\wedge = 2 + (4 + 4^\wedge) = 2 + 0 = 2$. Det första uttrycket blir också 2. Vi kan alltså ersätta subtraktion av 4 med addition av $4^\wedge$. Det är oerhört viktigt, för addition är kommutativ och associativ till skillnad från subtraktion.

För att förstå varför detta är praktiskt betraktar vi en ekvation, t ex $3x - 4 - 2x - 3 = 0$. Skriv vänster led som $3x + 4^\wedge + 2^\wedge x + 3^\wedge$, vilket ger $3x + 2^\wedge x + 4^\wedge + 3^\wedge = 0$ eller $x + 7^\wedge = 0$, som ger $x = 7$. Här har vi verkligen glädje av de kommutativa och associativa lagarna!

Hur skall vi nu beräkna t ex $x = 4 - 6$? Svar: Vi får att $2 + x = 2 + (4 - 6) = 2 + 4 + 6^\wedge = 6 + 6^\wedge = 0$, dvs $2 + x = 0$, dvs $x = 2^\wedge$.

Multiplikation med 1 resp 0 skall också gälla som förut, t ex $1 \cdot 2^\wedge = 2^\wedge$ och $0 \cdot 2^\wedge = 0$.

För att beräkna $1^\wedge \cdot 2$ gör vi så här: $0 = 2 \cdot 0 = 2 \cdot (1 + 1^\wedge) = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1^\wedge = 2 + 2 \cdot 1^\wedge$. Dvs $2 + 2 \cdot 1^\wedge = 0$. Men detta visar att $2 \cdot 1^\wedge = 2^\wedge$.

Låt oss nu se på den distributiva lagen en gång till. $0 = 1\hat{} \cdot 0 = 1\hat{} \cdot (1 + 1\hat{}) = 1\hat{} \cdot 1 + 1\hat{} \cdot 1\hat{} = 1\hat{} + 1\hat{} \cdot 1\hat{}$, alltså $1\hat{} + 1\hat{} \cdot 1\hat{} = 0$. Kancellationslagen ger oss att $1\hat{} \cdot 1\hat{} = 1$, och på liknande sätt får vi att $3\hat{} \cdot 4\hat{} = 12$.

Emellertid vore det fel att säga att vi har *bevisat* att $1\hat{} \cdot 1\hat{} = 1$. Snarare bör vi säga att detta är en konsekvens av att vi låter de negativa talen lyda samma räknelagar som de ”vanliga” talen. Visserligen har vi ingen erfarenhet som säger att resultatet är rimligt, men inte heller tvingas vi säga att det är orimligt. I alla händelser har vi här haft användning av de kommutativa m fl lagarna.

Låt oss nu stanna upp ett ögonblick och se vad vi har gjort. Situationen var den att vi hade ett olösligt problem, nämligen en ekvation som inte hade någon rot. Då hittade vi på ett nytt element med den enda egenskapen att den var en lösning till det olösliga problemet. Man frågar sig då gärna: *Får man göra så?*

Det är ett intressant och viktigt problem. Och den är naturligtvis kopplad till en annan fråga: *Vem eller vad bestämmer vad man får respektive inte får göra?*

Ett svar på den frågan är: *Man får hitta på vad som helst, bara det inte leder till orimligheter.* Vad jag menar är t ex följande: Det finns inget tal x som uppfyller både $x < 0$ och $1 < x$. Säg att vi uppfinner ett sådant tal precis på samma sätt som vi gjort ovan. Det skall lyda lagarna för vanliga tal. En sådan lag är att om $a < b$ och $b < c$, så $a < c$. Vi får då att $1 < x$ och $x < 0$, dvs $1 < 0$, vilket är orimligt. Vi drar slutsatsen att ett sådant tal x ”får vi inte hitta på”.

Detta ger en ny intressant och viktig fråga. Det är uppenbart att de negativa talen medför förvånande konsekvenser som vi inte kunde förutse. Tänk om de skulle medföra orimliga slutsatser som t ex att $0 = 1$. Hur vet vi att de inte gör så? Svaret är att det vet vi inte, men de har inte gjort så hittills. *Om* man skulle upptäcka en sådan, då finge vi tänka igenom situationen från början.

Ekvationen $x + 2 = 0$ är inte den enda orimliga ekvationen. $x \cdot 5 = 1$ är lika orimlig (i mängden av naturliga tal). Låt oss, på samma sätt som ovan, införa nya tal, t ex tal 5%, som uppfyller $5\% \cdot 5 = 1$. Även dessa tal skall lyda räknelagarna. Vi ser att vad vi nu har uppfunnit är de allmänna bråken.

Eller betrakta ekvationen $x^2 + 1 = 0$. Den är också orimlig. Men på precis samma sätt som ovan inför vi ett nytt tal, i, som inte funnits förut, och som skall lyda räknelagarna, och som skall uppfylla $i^2 + 1 = 0$. Nu har vi infört de komplexa talen, och de ger knappast upphov till större problem än de negativa har gjort, även om de faktiskt medför orimligheter. Betrakta följande beräkning:

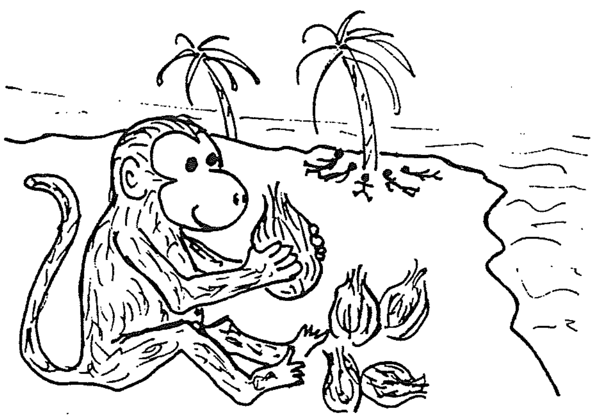
$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = i \cdot i = -1$$

dvs $1 = -1$, vilket är klart orimligt. Vi löser problemet genom att bestämma att negativa och imaginära tal inte behöver följa räknelagen $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, som ju gäller för positiva tal. Vi offrar hellre den lagen än vi offrar de imaginära talen.

Men vad skall vi ha dessa nya tal till? För den som alltid vill ha en användning av matematiken kan man peka på att bokföring med skulder och tillgångar blir lättare med negativa tal, och att växelströmskretsar beskrivs bäst med imaginära tal. För andra är det tillräckligt att det är ett äventyr att lära känna dessa nya tal.

En parentes i sammanhanget är följande fråga: Har vi uppfunnit de negativa talen, som t ex Edison uppfann grammofonen? Eller har vi upptäckt dem, som Livingstone upptäckte Viktoriafallen? Kronecker tycks anse det första.

Men svaret är väl att tal inte ”finns” i samma mening som grammofonen eller Viktoriafallen. Det är svårt att tänka sig en tomte som bankar på en dörr och undrar: ”Finns det några naturliga tal här?” ”Finns” kan betyda många saker.



Till sist vill jag visa ett handfast problem, där vi har användning av de nya onaturliga (= negativa) talen:

Fem sjömän och en apa spolas i land på en öde ö. De tillbringar hela dagen med att samla kokosnötter, som de lägger i en stor hög på stranden. De somnar trötta. Emellertid vaknar en sjöman. Han tycker att det är säkrast att han tar sin del och gömmer den. Han delar därför nötterna (ärligt) i 5 lika stora högar, men finner att det blir 1 nöt över. Den ger han åt apan. Sjömannen gräver ner sin del, och apan gömmer sin nöt. De övriga 4 högarna läggs ihop till en (nu något mindre) hög. Sedan somnar han. Man förstår nu hur problemet fortsätter. Sjömännen vaknar en efter en. Var och en delar den hög han finner i 5 lika delar. Varje gång blir det en nöt över, som apan får, och som han gömmer. Och varje gång gräver sjömannen ner sin del. När morgonen gryr finns alltså fem gömda högar med nötter, en för var sjöman, plus att apan har 5 nötter för sin del. Nu frågas: Hur många nötter hade man samlat?

Det första vi kan konstatera om problemet är att det har många lösningar. Om vi har en lösning L_1, samt en lösning $L_2 = L_1 + S$, vad kan vi då säga om skillnaden S? Om vi delar L_1 med 5, får vi resten 1. Om vi delar L_2 med 5 får vi också resten 1. Det innebär att S delat med 5 ger resten 0, dvs S är delbart med 5. Sjöman nummer 1 gräver ner 1/5 av $L_1 - 1$ eller av $L_2 - 1$. Sjöman nummer 2 finner alltså $\frac{4}{5}(L_1 - 1)$ eller $\frac{4}{5}(L_2 - 1)$. Differensen är här $\frac{4}{5}S$, som även den måste vara delbar med 5, dvs S är delbart med 5^2. Och så vidare. Vi ser att S måste vara delbart med 5^5, eftersom det finns 5 sjömän som delar på nötterna. Två lösningar skiljer sig alltså åt med en multipel av $5^5 = 3\,125$. Men detta hjälper oss inte, om vi inte finner någon lösning. Det är vad vi skall göra nu.

Jag påstår att de samlade 4^ (eller -4) nötter!

Den förste sjömannen delar upp dessa -4 nötter i 5 högar, som var och en innehåller -1 nöt. Men då blir det $+1$ nöt över, som apan får $(-4 = 5 \cdot (-1) + 1)$. Apan gömmer sin nöt, och sjömannen sin -1 nöt. Kvar ligger -4 nötter, som nästa sjöman finner. Detta upprepas fem gånger. Morgonsolens strålar kommer att falla över de -4 nötter som ligger i en prydlig hög på stranden. På ön finns vidare fem gömda högar, var och en innehållande -1 nöt. Den ende som tydligen har tjänat på affären, är apan, som har fått $+5$ kokosnötter. En lösning är alltså -4.

Men då blir en annan lösning $-4 + 5^5 = 3\,121$.

Tala om negativa tal alltså!

Författare

Univ lektor Lars Nystedt · Matem inst · Stockholms univ · Box 6701 · 113 85 STOCKHOLM

elementa

1 9(

matematik fysik kemi

årg 73 nr 1

≈

Om att räkna med tal som inte finns är med författarens tillstånd kopierad ur tidskriften *Elementa* årgång 73 (1990), Nr 1, sid 9 – 15, för att användas som kurslitteratur i kursen Perspektiv på Matematik på programmet Civilingenjör och lärare vid KTH.

Lars Nystedt är även författare till *På tal om tal – en läsbok i matematik*, en bok som till delar bygger vidare på artikeln *Om att räkna med tal som inte finns.*

Nystedt, Lars. *På tal om tal – en läsbok i matematik.* ISBN 91-630-2268-0 (inb) [Djursholm] : Instant Mathematics, 1993