



KTH Teknikvetenskap

SF1625 Envariabelanalys
LÖSNINGSFÖRSLAG till Tentamen
2010-08-25

1. Bestäm de intervall där $f(x) = x^2 - \ln x$, är växande.

Vi observerar att definitionsmängden till f är $x > 0$. Vi deriverar och får $f'(x) = 2x - 1/x$ som existerar för alla $x > 0$. Vi teckenstuderar derivatan och ser att $f'(x) < 0$ då $0 < x < 1/\sqrt{2}$, $f'(1/\sqrt{2}) = 0$, och $f'(x) > 0$ då $x > 1/\sqrt{2}$. Det följer av detta att f är växande på intervallet $x \geq 1/\sqrt{2}$ och inte på något annat intervall.

Svar: f är växande på intervallet $x \geq 1/\sqrt{2}$ och inte på något annat intervall.

2. Beräkna med hjälp av partialbråksuppdelning integralen

$$\int_2^3 \frac{10x}{x^2 - 10x + 24} dx.$$

Med hjälp av partialbråksuppdelning får vi att

$$\begin{aligned} \int_2^3 \frac{10x}{x^2 - 10x + 24} dx &= \int_2^3 \left(\frac{30}{x-6} - \frac{20}{x-4} \right) dx \\ &= [30 \ln |x-6| - 20 \ln |x-4|]_2^3 \\ &= 30 \ln |3-6| - 20 \ln |3-4| - 30 \ln |2-6| + 20 \ln |2-4| \\ &= 30 \ln \frac{3}{4} + 20 \ln 2. \end{aligned}$$

3. Beräkna volymen av den rotationskropp som genereras då området mellan kurvan $y = \sin x$ och x -axeln på intervallet $0 \leq x \leq \pi$ roteras kring x -axeln.

Volymen ges av

$$\int_0^\pi \pi \sin^2 x \, dx = \pi \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx = \frac{\pi^2}{2}.$$

SVar: $\pi^2/2$

4. **A. Bestäm Maclaurinpolynomet (Taylorpolynomet kring origo alltså) av grad 2 till funktionen $f(x) = \ln(1 + x^2)$.**
B. Använd svaret på uppgift A när du approximativt beräknar arean mellan kurvan $y = \ln(1 + x^2)$ och x -axeln på intervallet $0 \leq x \leq 1/2$.

A. Vi deriverar och får $f'(x) = 2x/(1 + x^2)$ och $f''(x) = (2(1 + x^2) - (2x)^2)/(1 + x^2)^2$ och följaktligen är $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$ och $f''(0) = 2$. Därför är det sökta Taylorpolynomet $p(x) = x^2$.

B. Den sökta arean ges av $\int_0^{1/2} \ln(1 + x^2) \, dx$. Men eftersom $\ln(1 + x^2) \approx x^2$ för x nära origo (enligt uppgift A) är den sökta arean approximativt $\int_0^{1/2} x^2 \, dx = 1/24$.

Svar: A. $p(x) = x^2$. B. $1/24$.

(Den som är bra på att integrera kan förstås räkna ut integralen exakt:

$$\begin{aligned} \int_0^{1/2} \ln(1 + x^2) \, dx &= [x \ln(1 + x^2)]_0^{1/2} - \int_0^{1/2} \frac{2x^2}{1 + x^2} \, dx \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{5}{4} - \int_0^{1/2} \left(\frac{2 + 2x^2}{1 + x^2} - \frac{2}{1 + x^2} \right) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{5}{4} - 1 + 2 \arctan \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

5. **En kropp med massan m rör sig rätlinjigt med hastigheten $v(t)$. Den utsätts för en bromsande kraft $-k \cdot v(t)$, där k är en positiv konstant. Om vi antar att inga andra krafter påverkar kroppen så gäller enligt kraftekvationen att $m \frac{dv}{dt} = -k \cdot v(t)$. Bestäm hastigheten som funktion av tiden, om $k = 1$, $m = 2$ kg och $v(0) = 5$ m/s. Avgör sedan också hur lång sträcka kroppen rör sig efter tidpunkten $t = 0$.**

Vi ska först lösa differentialekvationen $v' + \frac{1}{2}v = 0$. Karakteristiska ekvationen $r + 1/2 = 0$ har lösning $r = -1/2$ varför differentialekvationens allmänna lösning är $v(t) = Ce^{-t/2}$. Med hjälp av initialvillkoret kan vi nu bestämma C . Eftersom $v(0) = Ce^0 = C$ ser vi att vi ska välja $C = 5$ för att få $v(0) = 5$. Hastigheten som funktion av tiden ges alltså av $v(t) = 5e^{-t/2}$. Sträckan $S(T)$ som kroppen rör sig från tidpunkten $t = 0$ till tidpunkten $t = T$ ges av

$$S(T) = \int_0^T 5e^{-t/2} dt = 5[-2e^{-t/2}]_0^T = 10 - e^{-T/2}.$$

Eftersom $\lim_{T \rightarrow \infty} S(T) = 10$ så ser vi att kroppen, om den får fortsätta att röra sig hur länge som helst, kommer att förflytta sig 10 meter.

Svar: $v(t) = 5e^{-t/2}$. 10 meter.

6. Beräkna integralen $\int_0^1 x\sqrt{1-x} dx$ på två olika sätt: **A. Med hjälp av partiell integration. B. Med hjälp av substitutionen $u = \sqrt{1-x}$.**

A. Vi använder partiell integration och får

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x} dx = [-x(1-x)^{3/2}/(3/2)]_0^1 - \int_0^1 \frac{-(1-x)^{3/2}}{3/2} dx = \left[\frac{-(1-x)^{5/2}}{(3/2)(5/2)} \right]_0^1 = \frac{4}{15}.$$

B. Vi använder substitutionen $u = \sqrt{1-x}$, som är injektiv, med $du = -dx/2\sqrt{1-x}$, vilket betyder att $x = 1 - u^2$ och $dx = -2u du$ och $x = 0 \Leftrightarrow u = 1$ och $x = 1 \Leftrightarrow u = 0$. Vi får:

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x} dx = \int_1^0 -2u^2(1-u^2) du = \frac{4}{15}.$$

Svar: 4/15

7. Vilken är den största area en rektangel i xy -planet kan ha om dess ena hörn ska vara i origo och det diagonalt motsatta hörnet ska ligga någonstans i området $x > 0, y > 0, y \leq \frac{9}{x+1} - 1$?

Den största arean fås uppenbart om man väljer det motsatta hörnet PÅ kurvan, dvs i en punkt där $y = \frac{9}{x+1} - 1$. I så fall blir arean

$$A(x) = x\left(\frac{9}{x+1} - 1\right) = \frac{8x - x^2}{x+1},$$

där $x > 0$ enligt villkoren i uppgiften. Vi deriverar och får (efter förenkling)

$$A'(x) = \frac{-x^2 - 2x + 8}{(x+1)^2}.$$

Enda nollstället för positiva x av $A'(x)$ inträffar när $x = 2$. Vi ser också att $A'(x)$ är positiv för $0 < x < 2$, så A är strängt växande här, och att $A'(x)$ är negativ för $x > 2$, så A är strängt avtagande här. Det följer att största värdet för funktionen A inträffar när $x = 2$. Det största värdet är $A(2) = 4$. Den största area vi kan få är alltså 4.

Svar: 4.

8. Avgör om det är sant att $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}(k+1)} \leq 3$.

Vi observerar att för varje positivt heltal k gäller att $\frac{1}{\sqrt{k}(k+1)} \leq \frac{1}{\sqrt{k}k} = \frac{1}{k^{3/2}}$. Det följer att

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}(k+1)} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}}.$$

Sätt $f(x) = x^{-3/2}$. Då är f avtagande på intervallet $x \geq 1$ (eftersom $f'(x) = -(3/2)x^{-5/2} < 0$) och följaktligen är

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) \leq f(1) + \int_1^{\infty} f(x) dx = 1 + \int_1^{\infty} x^{-3/2} dx = 3.$$

SVar: Ja.

9. Bestäm konstanten a så att funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \arctan \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$$

blir kontinuerlig i origo. Med a valt på detta sätt, avgör om f är deriverbar i origo.

När x går mot 0 går $1/x^2$ mot oändligheten. Vi har därför att $\lim_{x \rightarrow 0} \arctan(1/x^2) = \pi/2$. För att f ska vara kontinuerlig i origo krävs därför att $a = \pi/2$, ty då blir $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$. Med detta val av a undersöker vi deriverbarheten. Enligt derivatans definition är

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\arctan(1/h^2) - \pi/2}{h} = \{\text{l'Hospital}\} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+(1/h^2)^2}(-2/h^3)}{1} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2h}{h^4 + 1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Funktionen är alltså deriverbar med derivata 0 i origo.

Svar: $a = \pi/2$, funktionen är deriverbar med derivata 0 i origo.