



KTH Teknikvetenskap

SF1626 Flervariabelanalys
SEMINARIEUPPGIFT 3
läsåret 11/12

Se www.kth.se/social/course/SF1626 för information om hur seminarierna fungerar och vad du förväntas göra inför och under seminarierna.

UPPGIFTER TILL SEMINARIUM 3

Uppgift 1. Beskriv först områdena i deluppgifterna med hjälp av villkor på formen

$$f(x) \leq y \leq g(x), \quad a \leq x \leq b.$$

Beskriv sedan också områdena med villkor på formen

$$h(y) \leq x \leq k(y), \quad c \leq y \leq d.$$

Beräkna slutligen dubbelintegralen av funktionen $f(x, y) = xy$ över vart och dessa områden på vardera två olika sätt.

- a) Triangeln med hörn i $(0, -1)$, $(0, 1)$ och $(2, 0)$.
- b) Området som begränsas av kurvorna $y = \sqrt{x}$ och $y = x^3$.

Uppgift 2. En kilformad kropp beskrivs av olikheterna

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 0,5 \text{ [m]}, \\ 0 \leq y \leq 2,0 \text{ [m]}, \\ 0 \leq z \leq 0,5y \text{ [m]}. \end{cases}$$

Densiteten i kroppen varierar enligt $\rho(x, y, z) = y(1 - z)$ [kg/m³]. Beräkna kroppens massa.

Uppgift 3. Kroppen K begränsas av konen $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$ och sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ samt innehåller punkten $(0, 0, -1)$.

- a) Hur beskrivs K med olikheter i sfäriska koordinater?
- b) Försök att beskriva K med olikheter i cylindriska koordinater.
- c) Beräkna integralen $\iiint_K z^2 dx dy dz$.

Uppgift 4. Kroppen K begränsas av paraboloidytorna $z = x^2 + y^2$ och $z = 2 - x^2 - y^2$. Beräkna integralen

$$\iiint_K (x^2 + y^2) dx dy dz.$$

V.g. vänd!

Uppgift 5. En av Guldins regler lyder:

Då ett plant ytstycke, som helt ligger på ena sidan om en rät linje i dess plan roterar ett varv kring linjen alstras en kropp vars volym ges av

$$V = (\text{ytstyckets area}) \cdot \left(\begin{array}{l} \text{den sträcka ytstyckets tyngdpunkt} \\ \text{beskriver vid rotationen} \end{array} \right).$$

Ytstycket tänks därvid vara en platta med konstant densitet.

Visa att regeln gäller för den rotationskropp K som uppstår om triangeln i xz -planet med hörn i punkterna $(0, 0)$, $(0, 1)$ och $(1, 1)$ roteras ett varv i xyz -rummet kring z -axeln.