



KTH Teknikvetenskap

**SF1626 Flervariabelanalys
SEMINARIEUPPGIFT 4
läsåret 11/12**

Se www.kth.se/social/course/SF1626 för information om hur seminarierna fungerar och vad du förväntas göra inför och under seminarierna.

UPPGIFTER TILL SEMINARIUM 4

Uppgift 1.

- Förklara vad som menas med ett *vektorfält* i planet respektive rummet.
- Hur definieras att ett vektorfält är konservativt?
- Förklara vad som menas med att en kurvintegral är oberoende av väg.
- Red ut sambanden mellan följande utsagor för ett vektorfält $F = (P, Q)$ definierat i ett sammanhängande område i planet:
 - F är konservativt
 - $\partial P / \partial y = \partial Q / \partial x$
 - $\int_{\gamma} F \cdot dr$ är oberoende av väg
 - $\int_{\gamma} F \cdot dr$ är oberoende av kurvan γ 's parametrisering.

Uppgift 2. Ett vektorfält $F = (P, Q)$ i området $x, y > 0$ i planet ges av formlerna

$$P(x, y) = \frac{2x}{x^2 + y^2} - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \quad \text{och} \quad Q(x, y) = \frac{2y}{x^2 + y^2} + \frac{ax}{y^2}.$$

För vilka värden på parametern a är vektorfältet konservativt? Bestäm en potential till vektorfältet för sådana a .

Uppgift 3. Betrakta vektorfältet F i $\mathbb{R}^3$ som ges av $F = (yz, xz, xy)$ och kurvintegralen

$$\int_{\gamma} F \cdot dr.$$

- Låt γ vara den kurva som ges av $(x, y, z) = (\cos t, \sin t, t)$ då t löper från 0 till $\pi/4$. Beräkna integralen genom att använda kurvans parametrisering.
- Visa att fältet F är konservativt och bestäm en potentialfunktion till F . Beräkna nu integralen med hjälp av potentialen.
- För vilka slutna kurvor γ gäller att integralen är noll?

Uppgift 4. Låt $F = (y^2, x^2)$ och betrakta kurvintegralen

$$\int_{\gamma} F \cdot dr.$$

V.g. vänd!

- a) Beräkna integralen när $\gamma = \gamma_1$ som är linjesegmentet från punkten $(0, 1)$ till punkten $(1, 0)$.
- b) Beräkna integralen när $\gamma = \gamma_2$ som är den del av parabeln $y = 1 - x^2$ som går från punkten $(1, 0)$ till punkten $(0, 1)$.
- c) Beräkna integralen när $\gamma = \gamma_3$ som är den del av enhetscirkeln i första kvadranten som går från punkten $(0, 1)$ till $(1, 0)$.
- d) Beräkna integralen när γ är den slutna kurva som består av de två kurvstyckena γ_1 och γ_2
 - genom att utnyttja resultatet i a) och b), och
 - genom att tillämpa Greens formel.