Föreläsning 3.

1 Töjningstensorn

I denna föreläsning kommer vi konsekvent att använda oss utav Cartesisk tensornotation i vilken vi benämner våra koordinater med (x_1, x_2, x_3) och motsvarande hastighetskomponenter med (u_1, u_2, u_3).

Betrakta ett litet rektangulärt fluidelement som rör sig längs x_1-axeln (se figur 1). Hastigheten i x_1-riktningen, u_1, varierar längs x_1-axeln och därför kommer elementet att töjas när det rör sig. Om elementets längd är δx_1 och hastigheten vid den vänstra sidan är u_1 så kan vi approximera hastigheten vid den högra sidan med

$$u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\delta x_1\,, \tag{1}$$

där den andra termen är hastighetsförändringen längs elementet.

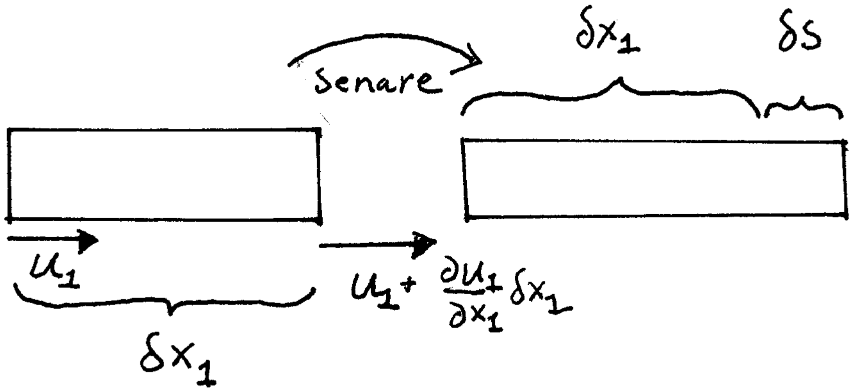

Figure 1: Ett fluidelement töjs längs x_1-axeln om dess hastighet varierar längs samma axel. I det här fallet töjs elementet ut (förlängs) i x_1 -led eftersom hastigheten vid dess högra sida är större än vid dess vänstra.

Under ett litet tidsintervall δt har den vänstra sidan rört sig sträckan $u_1\delta t$ och den högra sidan har rört sig sträckan

$$\left(u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\delta x_1\right)\delta t\,. \tag{2}$$

Under detta intervall har alltså elementet förlängts med en sträcka

$$\delta s = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\delta x_1 \delta t\,. \tag{3}$$

(Om $\delta s < 0$ så innebär det att elementet har förkortats.) Förlängningen per tidsenhet och längdenhet får vi således som

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\,. \tag{4}$$

Vi kallar denna storhet elementets linjära töjning utefter x_1-axeln.

En inkompressibel fluid har vi tidigare definierat som en fluid för vilket volymsmåttet (eller volymen) av en materiell kontrollvolym är bevarat. Vi visade att

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0\,, \tag{5}$$

för en inkompressibel fluid. För att ett litet fluidelement ska bevara sin volym när det deformeras så måste alltså töjningarna utefter koordinataxlarna ta ut varandra. Om elementet förlängs i en riktning så måste det förkortas i åtminstone en av de två andra riktningarna.

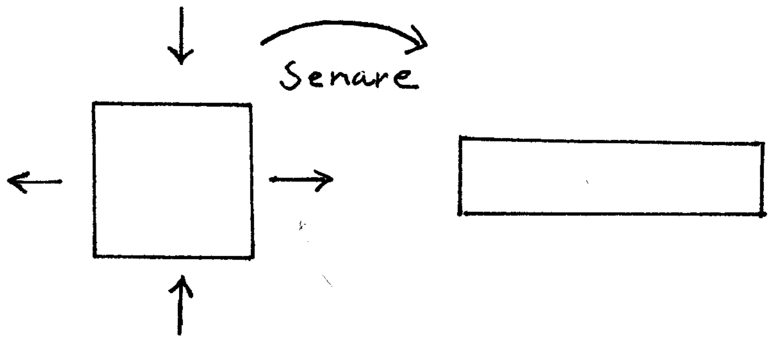

Figure 2: En inkompressibel töjning bevarar volymen av ett fluidelement. I en tvådimensionell strömning bevaras arean. Om elementet förlängs i en riktning så måste det förkortas i en annan riktning.

Ett fluidelement kan också töjas genom att det skjuvas. Betrakta det rektangulära elementet $ABCD$ i figur 3, med sidorna δx_1 och δx_2 och hastigheten (u_1, u_2) i punkten A. I punkten C kan hastigheten i x_1-riktningen approximeras med

$$u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\delta x_2\,. \tag{6}$$

I punkten B kan hastigheten i x_2-riktningen approximeras med

$$u_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\delta x_1\,. \tag{7}$$

Eftersom dessa hastighetskomponenter skiljer sig från motsvarande komponenter i punkten A så kommer elementet att skjuvas enligt figuren. Ur figuren så får vi att den totala skjuvningsvinkeln $\delta\alpha + \delta\beta$ per tidsenhet kan beräknas som

$$\frac{\delta\alpha + \delta\beta}{\delta t} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\frac{\delta x_2 \delta t}{\delta x_2 \delta t} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\frac{\delta x_1 \delta t}{\delta x_1 \delta t} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\,. \tag{8}$$

De linjära och skjuvande töjningar som ett fluidelement kan genomgå kan beskrivas med hjälp av *töjningstensorn*

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\,. \tag{9}$$

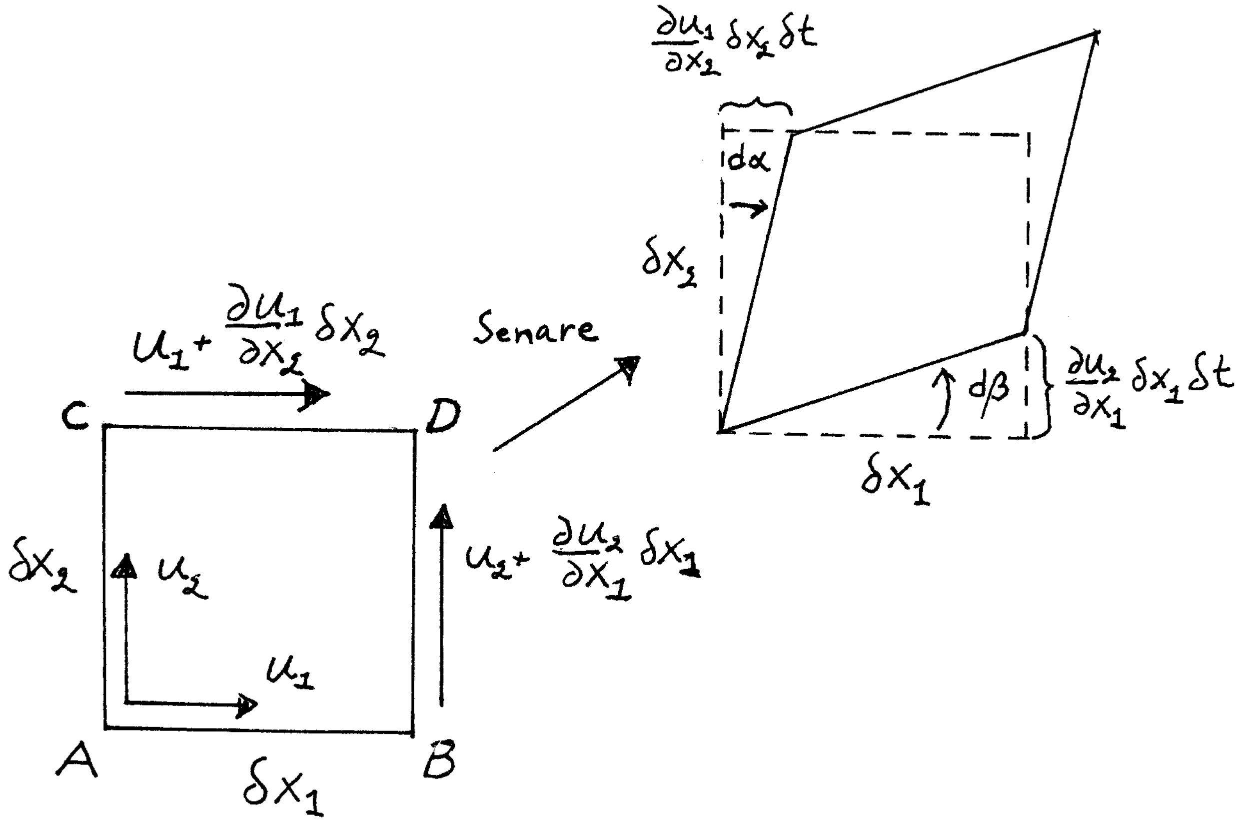

Figure 3: Ett fluidelement som skjuvas.

Diagonalelementen i töjningstensorn beskriver de linjära töjningarna medan de övriga elementen beskriver de skjuvande töjningarna. För en inkompressibel fluid har vi att spåret av töjningstensorn är noll

$$e_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0\,. \tag{10}$$

Från definitionen (9) framgår att töjningstensorn är symmetrisk,

$$e_{ij} = e_{ji}\,. \tag{11}$$

Som vi vet från den linjära algebran så kan vi alltid hitta ett Cartesiskt koordinatsystem i vilket en symmetrisk tensor bara har diagonalkomponenter. Detta systems koordinataxlar kallas för töjningens huvudaxlar. I detta system beskrivs alltså töjningen bara i termer av linjära töjningar utefter koordinataxlarna. I figur (3) kan vi se att töjningens huvudaxlar är diagonalerna av det kvadratiska elementet som skjuvas. Detta visar att linjär töjning och skjuvning är relativa begrepp. Vad som beskrivs som en töjning i ett koordinatsystem, beskrivs som en skjuvning i ett annat system.

Exempel 3.1
Bestäm töjningstensorns komponenter för följande hastighetsfält:

a) $(u, v, w) = (\alpha y, 0, 0)$
b) $(u, v, w) = (\alpha x, -\alpha y, 0)$
c) $(u, v, w) = (\alpha x, \alpha y, -2\alpha z)$

Lösning
Vi ändrar notationen genom

$$\begin{aligned}(u, v, w) &\rightarrow (u_1, u_2, u_3)\,, \\ (x, y, z) &\rightarrow (x_1, x_2, x_3)\,.\end{aligned}$$

Då kan vi lätt beräkna töjningstensorns olika komponenter i de tre fallen:

a) $e_{12} = e_{21} = \alpha/2$. Övriga komponenter är noll.
b) $e_{11} = \alpha,\ e_{22} = -\alpha$. Övriga komponenter är noll.
c) $e_{11} = e_{22} = \alpha,\ e_{33} = -2\alpha$. Övriga komponenter är noll.

2 Spänningstensorn

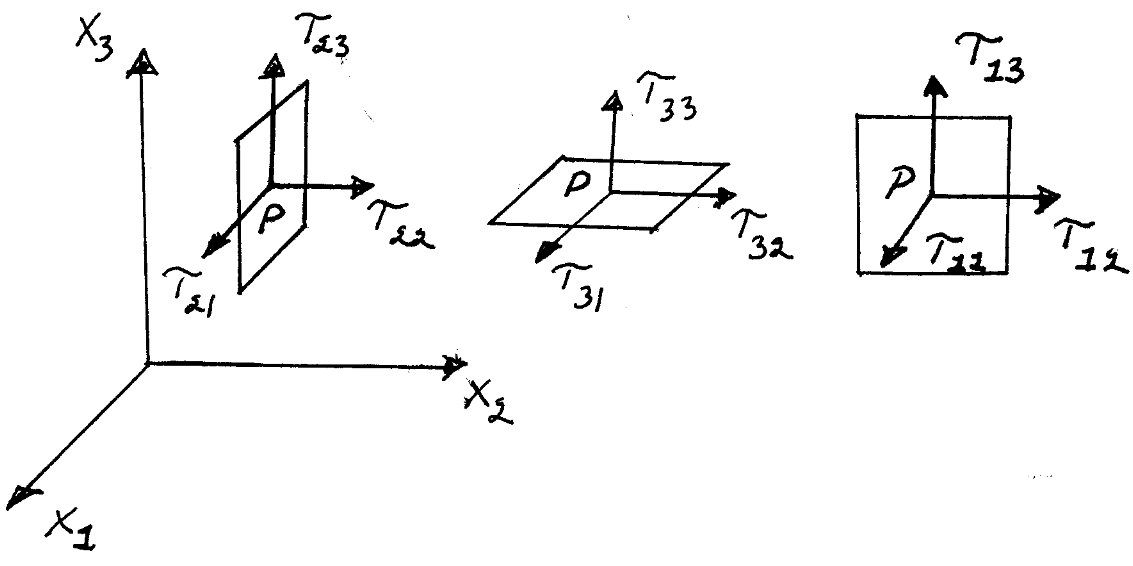

Figure 4: Tre olika sätt att skära ut ett ytelement som tangerar en punkt P och motsvarande komponenter i spänningstensorn.

Spänningstensorn, τ_{ij}, beskriver kraften per areaenhet på ett ytelement. Närmare bestämt är τ_{ij} kraften per areaenhet i den j:te riktningen på ett ytelement vars normalvektor pekar i den i:te riktningen. Spänningstensorn är en funktion av rumskoordinaterna (x_1, x_2, x_3) och tiden, med andra ord så är den ett tensorfält. Ytelementet som vi tänker oss att kraften verkar på är alltså ett ytelement som tangerar den punkt, P, som har de aktuella koordinaterna. I figur 4 ser vi tre olika sätt att skära ut ett ytelement som tangerar en punkt och motsvarande komponenter av τ_{ij}. På varje element verkar en normalkraft som beskrivs av en diagonalkomponent av τ_{ij} och två skjuvkrafter som beskrivs av komponenterna utanför diagonalen.

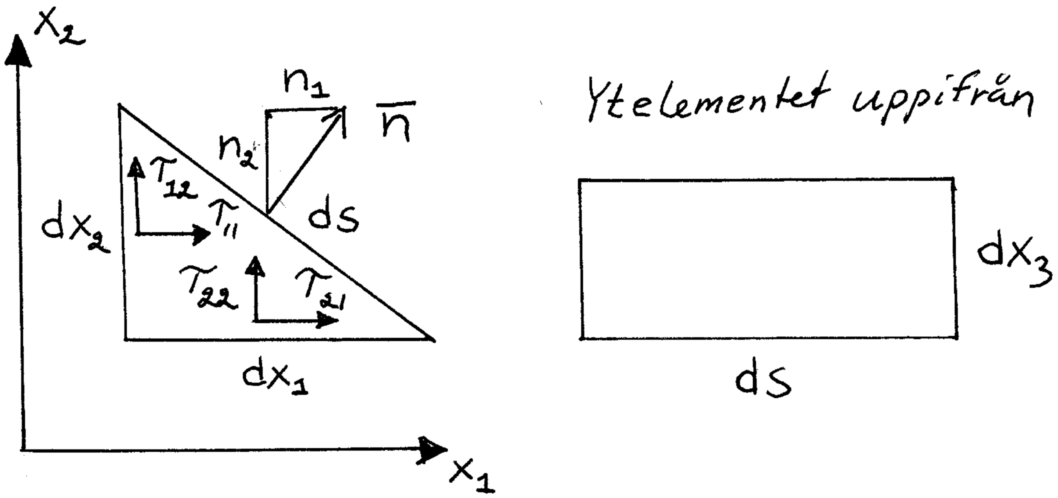

Figure 5: Spänningen på ett ytelement vars normalvektor **n** pekar i godtycklig riktning kan fås genom projektion av **n** på spänningstensorn.

Om vi känner τ_{ij} så kan vi också bestämma spänningen eller kraften per areaenhet på ett ytelement vars enhetsnormalvektor, **n**, pekar i godtycklig riktning. Antag att vi vill bestämma kraften på rektangeln med sidorna $\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x_1^2 + \mathrm{d}x_2^2}$ och $\mathrm{d}x_3$, i figur 5. Vi betraktar ytelementet från sidan. Ytelementet har enhetsnormalvektor

$$\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3) = \left(\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}s}, \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}s}, 0 \right) . \tag{12}$$

Om ds är mycket litet, kan vi anta att kraften på ytelmentet med sidan ds är summan av de krafter som verkar på de två ytelement som har sidorna dx_1 och dx_2 (se figur 5). Kraften i x_1-riktningen på ytelementet kan då beräknas som

$$\mathrm{d}F_1 = \tau_{11}\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3 + \tau_{21}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_3 . \tag{13}$$

Kraften i x_1-riktningen per areaenhet är således

$$f_1 = \frac{\mathrm{d}F_1}{\mathrm{d}x_3\mathrm{d}s} = n_1\tau_{11} + n_2\tau_{21} . \tag{14}$$

På samma sätt får vi att kraften (per areaenhet) på ytelementet i x_2-riktningen är

$$f_2 = n_1\tau_{12} + n_2\tau_{22} . \tag{15}$$

Mer generellt så får vi att kraften (per areaenhet) i den j:te riktningen på ett ytelement med enhetsnormalvektor $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ kan skrivas

$$f_j = n_i\tau_{ij} , \tag{16}$$

där vi enligt Einsteins regel summerat över i. Genom att projicera spänningstensorn på en enhetsvektor $\mathbf{n}$ så har vi fått en vektor $\mathbf{f}$ vars j:te komponent betecknas med f_j.

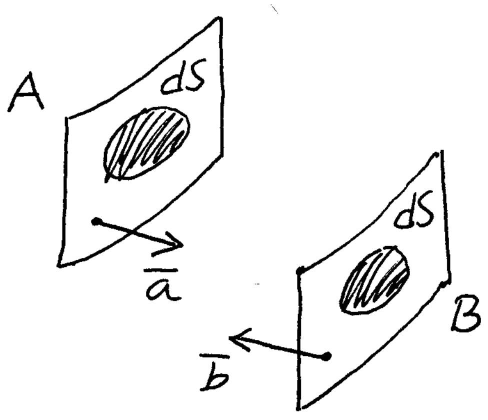

Figure 6: Två mot varandra liggande ytor A och B som vi har frilagt.

Vi tänker oss nu att vi skär ett snitt genom en fluid och på så sätt frilägger två mot varandra liggande ytor A och B som ömsesidigt påverkar varandra med en kontaktkraft. Vi låter $\mathbf{a}$ vara enhetsnormalvektorn till A som pekar i riktning mot B och $\mathbf{b} = -\mathbf{a}$ vara enhetsnormalvektorn till B som pekar i riktning mot A (se figur 6). Kraften i den j:te riktningen på ett arealement $\mathrm{d}S$ i ytan A från ett motsvarande element i B fås nu som

$$\mathrm{d}F_j^A = a_i \tau_{ij}\, \mathrm{d}S\,. \tag{17}$$

Motsvarande kraft på motsvarande ytelement i B fås som

$$\mathrm{d}F_j^B = b_i \tau_{ij}\, \mathrm{d}S = -a_i \tau_{ij}\, \mathrm{d}S\,. \tag{18}$$

Alltså har vi att

$$\mathrm{d}F_j^B = -\mathrm{d}F_j^A\,, \tag{19}$$

vilket är Newtons tredje lag om kraft och reaktionskraft.

Vi frilägger nu istället en kontrollvolym vars begränsningsyta har enhetsnormalvektorn $\mathbf{n}$. Kraften i den j:te riktningen från den omgivande fluiden på ett ytelement $\mathrm{d}S$ beräknar vi på samma sätt som förut

$$\mathrm{d}F_j = n_i\, \tau_{ij} \mathrm{d}S\,. \tag{20}$$

Den totala kontaktkraften på kontrollvolymen får vi genom att integrera över hela begränsningsytan,

$$F_j = \int_S n_i \tau_{ij}\, \mathrm{d}S\,. \tag{21}$$

Denna ytintegral kan vi skriva om till en volymsintegral genom att använda Gauss sats. För en materiell kontrollvolym får vi

$$F_j = \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i}\, \mathrm{d}\mathcal{V}\,. \tag{22}$$

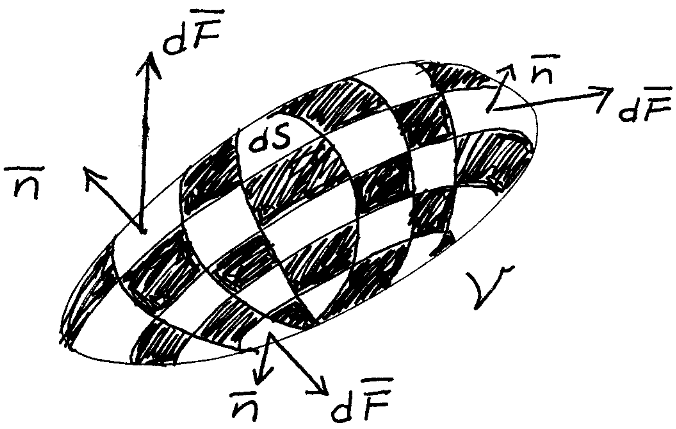

Figure 7: Den totala kontaktkraften på en kontrollvolym får vi genom att integrera kontaktkraften över hela dess begränsningsyta.

För en fix kontrollvolym får vi motsvarande uttryck med den enda skillnaden att $\mathcal{V}$ är utbytt mot V.

Slutligen ska vi visa att spänningstensorn är symmetrisk. Detta gör vi genom att betrakta momentekvationen för ett kubiskt fluidelement med sidan $\mathrm{d}x$. Enligt figur 8 kan kraftmomentet med avseende på en rotationsaxel genom kubens centrum och som är parallell med x_1-axeln beräknas som

$$M_1 = 2(\tau_{23} - \tau_{32})(\mathrm{d}x)^2 \frac{\mathrm{d}x}{2} \tag{23}$$

Enligt momentekvationen har vi att

$$M_1 = I_1 \dot{\omega} = \rho (\mathrm{d}x)^3 \frac{(\mathrm{d}x)^2}{6} \dot{\omega} \tag{24}$$

där ω är kubens vinkelhastighet med avseende på x_3-axeln och I_1 dess tröghetsmoment med avseende på samma axel. Alltså har vi att

$$\tau_{23} - \tau_{32} = \rho \frac{(\mathrm{d}x)^2}{6} \dot{\omega} \,. \tag{25}$$

Om vi nu låter $\mathrm{d}x \to 0$ får vi att

$$\tau_{23} = \tau_{32} \,, \tag{26}$$

och mer generellt

$$\tau_{ij} = \tau_{ji} \,. \tag{27}$$

Med andra ord är spänningstensorn symmeterisk.

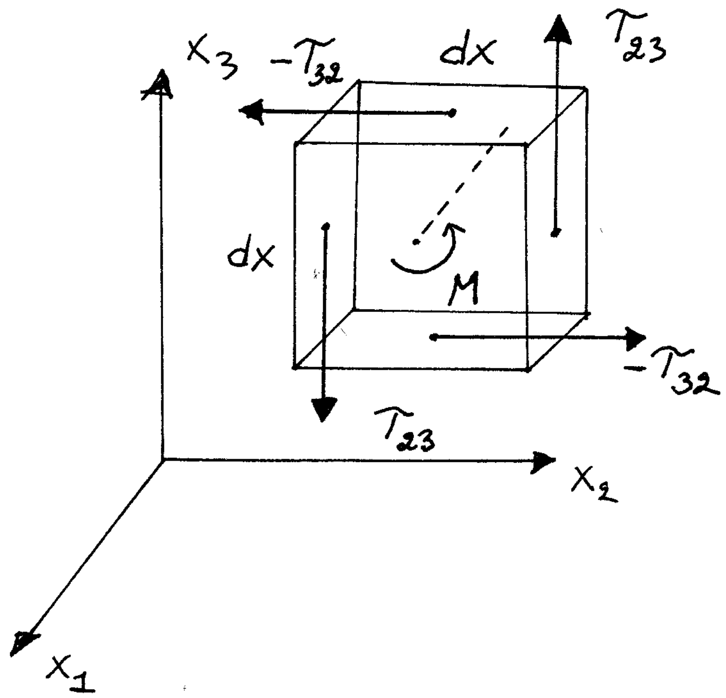

Figure 8: Kraftmomentet på en kub med sidan dx, med avseende på en rotationsaxel genom kubens centrum som är parallell med x_1-axeln.