KTH-ICT-ES

# Tentamen i Reglerteknik.

## 7,5 hp varav tentamen ger 4,5 hp

**Kurskod**: IE1304

**Datum**: 2011-03-14

**Tid**: 9.00-13.00

**Examinatorer**: Jan Andersson och Leif Lindbäck

## Tentamensinformation:

---

**Hjälpmedel:** Bilagd formelsamling, dimensioneringsbilaga och miniräknare

**Miniräknare:** Får användas

**Omfång:** Tentamen består av 20 uppgifter och totalt 50 poäng.

**Poängkrav:** För betyget E krävs 25 p.

**Utförande**: Namn och personnummer skall anges på varje inlämnat skrivpapper.
Bladnr. och uppgiftsnr. skall anges på varje inlämnat skrivpapper
Skriv endast på en sida.
Redovisade lösningar skall vara fullständiga och lätta att följa, egna antaganden skall motiveras.

1. En elektriskt uppvärmd ugn skall ha temperaturstyrning. Nämn minst en statisk egenskap hos systemet. (2p)

2. Ge exempel på minst två processer, som utan styrning är instabila. (2p)

3. Hur definierar man det ”proportionella bandet” för en P-regulator? (2p)

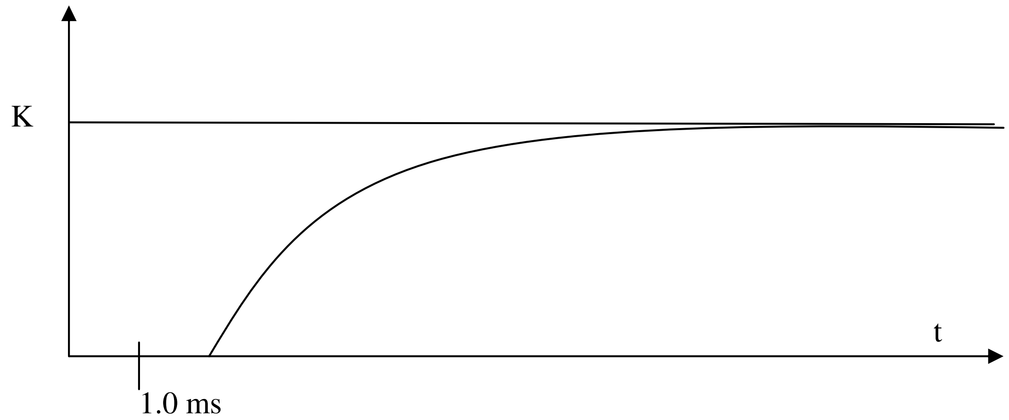
4. Ibland beskrivs reglerobjektet med hjälp av en typsiffra. Förklara begreppet. (2p)

5. Hur kan man vänta sig att en typisk processreglering av P-typ ändras med förstärkningen K? Hur påverkas de viktigaste egenskaperna? (2p)

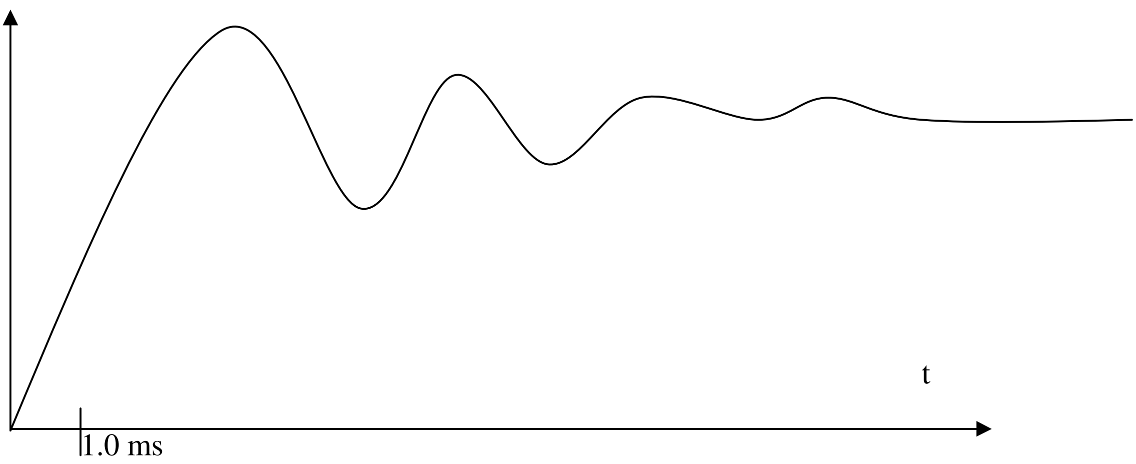
6. Ett tidsdiskret system ges av $y = \frac{z^2 + 0.4z + 0.1}{(z-0.5)(z-2)} \cdot u$ . Är systemet stabilt? (2p)

7. Vilka nackdelar kan man erhålla med en diskret regulator? (2p)

8. Figuren visar stegsvaret för en process med dödtid och en tidskonstant. Vilken är överföringsfunktionen för processen? (2p)



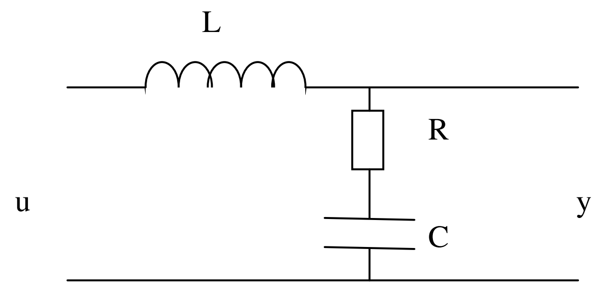
9. Figuren visar stegsvaret för ett helt reglersystem vid en börvärdesändring. Bestäm stigtiden, insvängningstiden och översvängen räknat i %. (3p)




10. Vilken egenskap förbättras (i första hand) hos ett reglersystem som ändras från PI-reglering till PID-reglering? (2p)

11. Bestäm rampsvaret (lutning 1) för ett system som beskrivs med överföringsfunktionen $G(s) = \dfrac{2}{s^2+4}$? (2p)

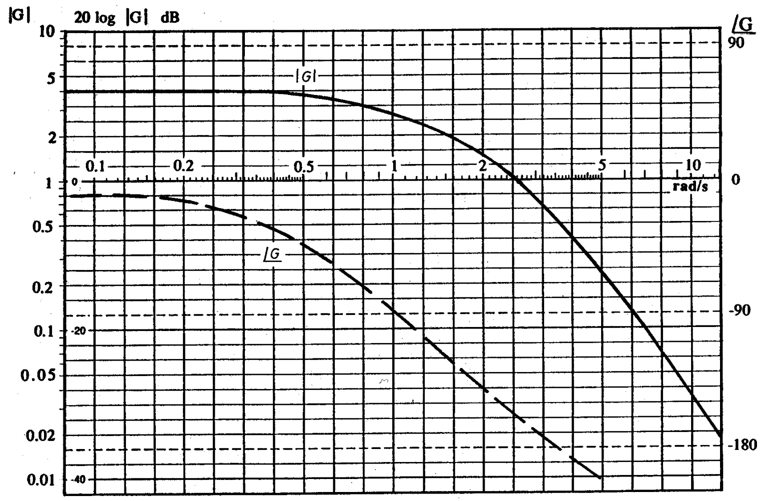
12. Bestäm differentialekvationen för det elektriska filtret i figuren, där
u = insignal
y = utsignal
R = 1 k Ω
C = 1 mF
L = 100 H




(3p)

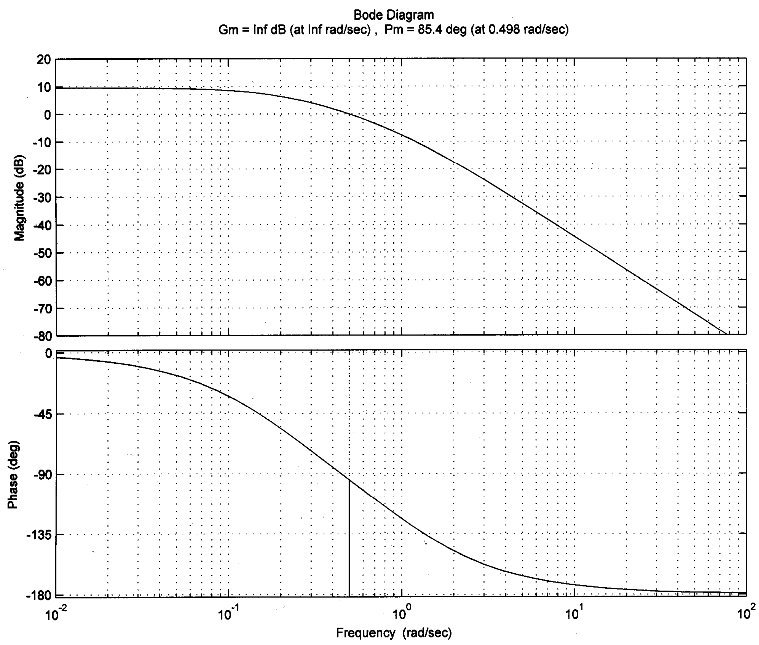
13 Figuren visar Bodediagrammet för kretsöverföringen (slingförstärkningen) $G_k(s)$ hos ett system.

Bestäm Fasmarginalen $\varphi_m$
Approximativ stigtid $t_r$ vid stegformad börvärdesändring
Det kvarvarande felet eo vid stegformad börvärdesändring
Det kvarvarande felet e1 vid rampformad börvärdesändring




(4p)

14 Ett systems kretsfunktion (slingförstärkningen) har bodediagrammet enligt figur. Processen skall regleras med en PI-regulator. Dimensionera denna. Man önskar en fasmarginal på 38°. Bestäm regulatorns K och $T_I$:




(3p)

15 En process med överföringsfunktionen $G(s) = \dfrac{10}{1+s2}$ ska småningom styras med en styckvis konstant insignal och samplingstiden ska vara 0.1 sekunder. Därför måste processen diskretiseras och beskrivas med en lineär differensekvation av följande typ: $y_k = a \cdot y_{k-1} + b \cdot u_{k-1}$
Beräkna denna differensekvation. (2p)

16 Det stabila tidsdiskretra systemet $H(z) = \dfrac{2z+3}{z^2 - 0.40z + 0.53}$
påverkas av ett enhetssteg och y svänger småningom in mot sitt slutvärde. Vilket är slutvärdet? (2p)

17 Bestäm lågfrekvensförstärkningen för nedanstående stabila tidsdiskreta system.

$$H(z) = \frac{2.0 \cdot z^2 + 3.0 \cdot z}{z^3 - 0.9 \cdot z^2 + 0.73 \cdot z - 0.26} \qquad (2p)$$

18 Visa med valfri metod om systemen är stabila.
Insignal = u, utsignal = y
a) y(k) = 2y(k-1) - 3y(k-2) + u(k) (1p)
b) y(k) = 3y(k-1) + 2y(k-2) - 0.5y(k-3) + u(k) (1p)

19 a) En process med nedanstående överföringsfunktion ska regleras med en ***integrerande*** polplaceringsregulator. Den extra polen pga integrering kan placeras i origo. Alla andra poler ska ligga i z=0.3. Rita ett blockschema med uträknade värden för regulatorn.

$$H(z) = \frac{2.0 \cdot z^{-1}}{1 - 0.90 \cdot z^{-1}} \qquad (3p)$$

b) Bestäm differensekvationen som ska programmeras när ovanstående regulator implementeras. (1p)

20 En process är beskriven på tillståndsform nedan.
a) Beräkna var processens poler ligger (2p)

b) Processen ska regleras med en tillståndsåterkopplad polplaceringsregulator. Alla poler ska ligga i s = -0.5. Rita ett blockschema med uträknade värden för regulatorn. Regulatorn behöver inte ha någon börvärdesfaktor ($K_r$) (3p)

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

# Enkät för utvärdering av kursen IE1304 Reglerteknik Våren 2011 (period 3)

Vi vill veta vad Du tycker om kursen!
Vi uppskattar om du fyller i enkäten och lämnar in denna tillsammans med tentan. Tag loss sidan från häftklammern
Sätt kryss i lämpliga rutor.
Vilken inriktning läser du?

☐ Elektronik och data ☐ Annan ________________

**Betyg 1:** Stämmer inte alls. **Betyg 5:** Instämmer helt.

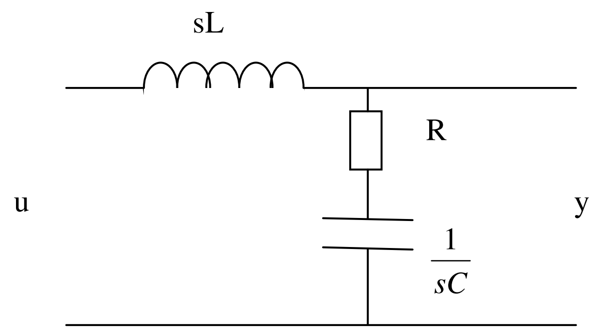
| **Påstående** | **Betyg 1** | **Betyg 2** | **Betyg 3** | **Betyg 4** | **Betyg 5** |
|---|---|---|---|---|---|
| Informationen kring kursen var bra (**kurshemsidorna**) | | | | | |
| **Kursen** var som helhet givande och intressant | | | | | |
| **Lektionerna** gav ett bra utbyte | | | | | |
| **Laborationerna** gav ett bra utbyte | | | | | |
| **Handledningen** under laborationerna var bra. | | | | | |
| **Laborationsutrustningen** bör uppdateras | | | | | |
| **Laborationsanvisningarna** (PM och web) var bra. | | | | | |
| **Läroboken** var bra: Modern reglerteknik av Bertil Thomas | | | | | |
| **Tentamen** var väl anpassad till kursen | | | | | |

Lösningsförslag till tentamen i Reglerteknik 11-03-14

1-10 Teorifrågor; se lärobok och laborationer

11. $\frac{1}{s^2} \cdot \frac{2}{s^2 + 2^2}$ => rampsvaret $\frac{2}{2^3} \cdot (2t - \sin 2t) = \frac{1}{4}(2t - \sin 2t)$

12.




$$G = \frac{y}{u} = \frac{R + \frac{1}{sC}}{sL + R + \frac{1}{sC}} = \frac{1 + sRC}{1 + sRC + s^2 LC}$$

$$y(s^2 LC + sRC + 1) = u(sRC + 1)$$

$$LC \cdot \ddot{y} + RC \cdot \dot{y} + y = RC \cdot \dot{u} + u$$

$$100 \cdot 1m \cdot \ddot{y} + \dot{y} + y = \dot{u} + u$$

$$\begin{cases} 0{,}1 \cdot \ddot{y} + \dot{y} + y = \dot{u} + u \\ \ddot{y} + 10\dot{y} + 10y = 10\dot{u} + 10u \end{cases}$$

13 Bodediagrammet för slingförstärkningen $G_K$: ( $\omega_\pi = 3{,}5\frac{rad}{s}$ och $\omega_c = 2{,}55\frac{rad}{s}$) =>

$A_m = \frac{1}{0{,}5} = 2ggr$ och

$\varphi_m \approx 22^o$

$t_r \approx \frac{1{,}4}{2{,}55} = 0{,}55 sekunder$

Systemtyp 0: LF-förstärkningen $K_{LF}$ = 4 ggr => $e_0 = \frac{1}{1 + K_{LF}} = \frac{1}{1+4} = \frac{1}{5} = 0{,}2$

vid steg in

$e_1 = \infty$ vid ramp in

14 P-regulator med $\varphi_m = 38^o + 11^o = 49^o$

⇨ $A_m = 10dB = 10^{\frac{10}{20}} = 3{,}16 ggr$ => K = 3,16

⇨ 3 * 3,16 = 9,48 ggr

Efter förstärkning med 10 dB => $\omega_c \approx 1{,}2 \frac{rad}{sekund}$

För PI-reglering: $\omega_b = 0{,}2 \cdot 1{,}2 = 0{,}24 \frac{rad}{sekund}$

⇨ $T_I = \frac{1}{0{,}24} \approx 4{,}16 sekund$

⇨ $G_{PI} = K(1 + \frac{1}{T_I \cdot s}) = 3{,}16(1 + \frac{1}{s \cdot 4{,}16})$

## Uppgift 15

### Givet

$G(s) = \dfrac{10}{1+2s}$ , $h = 0.1s$

### Sökt

Differensekvationen, $y(k) = ay(k-1) + bu(k-1)$, motsvarande den diskretiserade överföringsfunktionen.

### Lösning

Enligt formelsamlingen har $\dfrac{K}{1+Ts}$ den steginvarianta diskretiseringen $\dfrac{K(1-e^{-\frac{h}{T}})z^{-1}}{1-e^{-\frac{h}{T}}z^{-1}}$

Vi har $K = 10, T = 2, h = 0.1$ vilket ger $H(z) = \dfrac{Y(z)}{U(z)} = \dfrac{10(1-e^{-\frac{0.1}{2}})z^{-1}}{1-e^{-\frac{0.1}{2}}z^{-1}} \approx \dfrac{0.49z^{-1}}{1-0.95z^{-1}}$.

Detta ger $Y = \dfrac{0.49z^{-1}}{1-0.95z^{-1}}U$ ; $Y(1-0.95z^{-1}) = 0.49z^{-1}U$ ; $Y = 0.95z^{-1}Y + 0.49z^{-1}U$.

Invers z-transformering ger $y(k) = 0.95y(k-1) + 0.49u(k-1)$

### Svar

$y(k) = 0.95y(k-1) + 0.49u(k-1)$

## Uppgift 16

### Givet

$H(z) = \dfrac{2z+3}{z^2-0.40z+0.53}$, insignalen $U$ = enhetssteg.

### Sökt

Slutvärdet

### Lösning

Enligt formelsamlingen har ett enhetssteg z-transformen $\dfrac{z}{z-1}$, vilket ger att utsignalen, $Y = \dfrac{2z+3}{z^2-0.40z+0.53} \cdot \dfrac{z}{z-1}$

Använd slutvärdessatsen:

$$\lim_{k\to\infty} y(k) = \lim_{z\to 1}(z-1)Y(z) = \lim_{z\to 1}(z-1)\cdot\frac{2z+3}{z^2-0.40z+0.53}\cdot\frac{z}{z-1} = \lim_{z\to 1}\frac{z(2z+3)}{z^2-0.40z+0.53} =$$

$$\frac{2+3}{1-0.40+0.53} \approx 4.4$$

### Svar

Slutvärdet är 4.4

## Uppgift 17

### Givet

$$H(z) = \frac{2.0z^2+3.0z}{z^3-0.90z^2+0.73z-0.26}$$

### Sökt

Lågfrekvensförstärkningen

### Lösning

Lågfrekvensförstärkningen, $K_{LF} = H(1) = \dfrac{2.0+3.0}{1-0.90+0.73-0.26} \approx 8.8$

### Svar

$K_{LF} \approx 8.8$

## Uppgift 18

### Givet

a) $y(k) = 2y(k-1) - 3y(k-2) + u(k)$

b) $y(k) = 3y(k-1) + 2y(k-2) - 0.5y(k-3) + u(k)$

### Sökt

Är ovanstående system stabila?

**Lösning, deluppgift a**

$$y(k) = 2y(k-1) - 3y(k-2) + u(k) \Rightarrow Y = 2Yz^{-1} - 3Yz^{-2} + U \; ; \; \frac{Y}{U} = \frac{1}{1 - 2z^{-1} + 3z^{-2}}$$

$$\text{Karakteristisk ekvation: } z^2 - 2z + 3 = 0 \Rightarrow z = 1 \pm \sqrt{1-3} = 1 \pm j\sqrt{2}$$

Systemet är instabilt eftersom polerna ligger utanför enhetscirkeln, då

$$|z| = \sqrt{1+2} > 1$$

**Lösning, deluppgift b**

$$y(k) = 3y(k-1) + 2y(k-2) - 0.5y(k-3) + u(k)$$

$$\Rightarrow Y = 3Yz^{-1} + 2Yz^{-2} - 0.5Yz^{-3} + U \; ; \; \frac{Y}{U} = \frac{1}{1 - 3z^{-1} - 2z^{-2} + 0.5z^{-3}}$$

$$\text{Karakteristisk ekvation: } z^3 - 3z^2 - 2z + 0.5 = 0$$

Använd Schur-Coons stabilitetskriterium.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | **1** | **-3** | **-2** | **0.5** | $a_0 > 0$, **OK** |
| $b$ | $1^2 - 0.5^2 =$ **0.75** | $1 \cdot (-3) - 0.5 \cdot (-2) =$ **-2** | $1 \cdot (-2) - 0.5 \cdot (-3) =$ **-0.5** | | $b_0 > 0$, **OK** |
| $c$ | $0.75^2 - (-0.5)^2 \approx$ **0.3125** | $0.75 \cdot (-2) - (-0.5) \cdot (-2) =$ **-3** | | | $c_0 > 0$, **OK** |
| $d$ | $0.3125^2 - (-3)^2 \approx$ **-8.9023** | | | | $d_0 < 0$, ***EJ OK*** |

Systemet är instabilt eftersom $d_0 < 0$

**Svar**

a) Instabilt

b) Instabilt

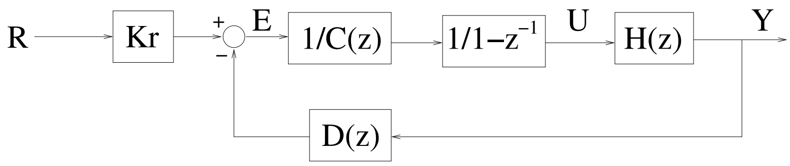
# Uppgift 19

**Givet**

$$H(z) = \frac{2.0z^{-1}}{1 - 0.90z^{-1}}$$

**Sökt**

En integrerande polplaceringsregulator enligt blockschemat nedan. Alla poler ska ligga i $z = 0.3$ utom den extra polen pga integreringen, vilken ska ligga i $z = 0$.




**Lösning, deluppgift a**

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{2.0z^{-1}}{1 - 0.90z^{-1}}$$

Integrering $\Rightarrow A = (1 - z^{-1})(1 - 0.90z^{-1})\,,\; B = 2.0z^{-1}$

Gradtalet för önskat karakteristiskt polynom, $n_p = n_a + n_b - 1 = 2 + 1 - 1 = 2$

Gradtalet för C(z), $n_c = n_b - 1 = 1 - 1 = 0$

Gradtalet för D(z), $n_d = n_a - 1 = 2 - 1 = 1$

Placera den "ordinarie" polen i $z = 0.3$ och den extra polen pga integrering i $z = 0$

$\Rightarrow$ önskat karaktristiskt polynom, $P(z) = (1 - 0z^{-1})(1 - 0.3z^{-1}) = 1 - 0.3z^{-1}$

Sätt systemets karakteristiska ekvation lika med önskat karaktristiskt polynom:

$$AC + BD = P\,;\; (1 - z^{-1})(1 - 0.90z^{-1}) * 1 + 2.0z^{-1}(d_0 + d_1 z^{-1}) = 1 - 0.3z^{-1}$$

$$2.0d_0 z^{-1} + 2.0d_1 z^{-2} - 1.9z^{-1} + 0.90z^{-2} + 1.0 = 1 - 0.3z^{-1}$$

Detta ger följande ekvationssystem:

$$\begin{cases} 2.0d_0 - 1.9 = -0.30 \\ 2.0d_1 + 0.90 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_0 = 0.80 \\ d_1 = -0.45 \end{cases}$$

Slutligen bestäms $K_r = \dfrac{P(1)}{B(1)} = \dfrac{1 - 0.3}{2.0} = 0.35$

**Lösning, deluppgift b**

$$E = 0.35R - (0.80 - 0.45z^{-1})Y \Rightarrow e(k) = 0.35r(k) - 0.80y(k) + 0.45y(k-1)$$

$$U = \frac{1}{1 - z^{-1}}E\,;\; E = (1 - z^{-1})U \;:\; U = E + z^{-1}U \Rightarrow u(k) = e(k) + u(k-1)$$

$$\Rightarrow u(k) = 0.35r(k) - 0.80y(k) + 0.45y(k-1) + u(k-1)$$

### Svar

a) $C(z) = 1$, $D(z) = 0.80 - 0.45z^{-1}$, $K_r = 0.35$, blockschema se ovan

b) $u(k) = 0.35r(k) - 0.80y(k) + 0.45y(k-1) + u(k-1)$

## Uppgift 20

### Givet

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} u\,,\;\; y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

### Sökt

a) Processens poler

b) En polplaceringsregulator som lägger alla poler i $s = -0.5$

### Lösning deluppgift a

Polerna ges av den karakteristiska ekvationen, $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$, där $\mathbf{I}$ är en enhetsmatris och $\mathbf{A}$ systemmatrisen.

$$\left| s\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \right| = 0\,; \quad \begin{vmatrix} s+2 & -1 \\ 0 & s+3 \end{vmatrix} = 0$$

$(s+2)(s+3) - 0 \cdot (-1) = 0\,;\;\; (s+2)(s+3) = 0$

### Lösning deluppgift b

Tillståndsåterkoppling innebär att styrsignalen, $u$, beräknas som en lineärkombination av tillståndsvariablerna, $u = -\mathbf{L} \cdot \mathbf{x} + K_r r$. Sätter vi in detta uttryck i tillståndsekvationen $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$ får vi $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B}(\mathbf{L}\mathbf{x} + K_r r)$. Det karakteristiska polynomet är alltså $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{L}) =$

$$\left| s\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix} \right| =$$

$$\left| \begin{bmatrix} s+2 & -1 \\ 0 & s+3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \\ 4l_1 & 4l_2 \end{bmatrix} \right| = 0\,; \quad \begin{vmatrix} s+2+l_1 & -1+l_2 \\ 4l_1 & s+3+4l_2 \end{vmatrix} =$$

$(s+2+l_1)(s+3+4l_2) - 4l_1(-1+l_2) =$
$(7l_1 + 8l_2 + 6) + (l_1 + 4l_2 + 5)s + s^2$

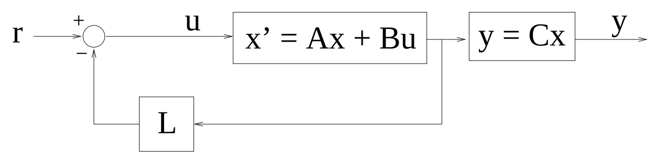
Det återkopplade systemet har två poler eftersom den karakteristiska ekvationen är av andra graden. Eftersom båda polerna skulle ligga i $s = -0,5$ gäller att det karakteristiska polynomet ska vara $(s+0.5)^2 = s^2 + s + 0,25$. Detta ger att $(7l_1 + 8l_2 + 6) + (l_1 + 4l_2 + 5)s + s^2 = s^2 + s + 0,25$

$$\Rightarrow \begin{cases} 7l_1 + 8l_2 + 6 = 0,25 \\ l_1 + 4l_2 + 5 = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} l_1 = 0.45 \\ l_2 = -1.1 \end{cases}$$

**Svar**

a) Processen har två poler som ligger i $s = -2\,,\ s = -3$

b)




$$L = \begin{bmatrix} 0.45 & -1,1 \end{bmatrix}$$