

Föreläsning 10, Egenskaper hos tidsdiskreta system

KTH

7 februari 2011

Innehåll

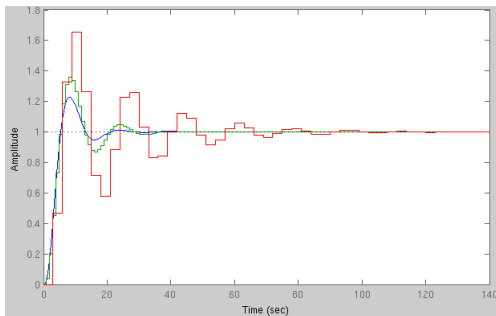
- 1 Kapitel 18.1. Skillnad mellan analog och digital reglering
- 2 Kapitel 18.2. Blockschemareduktion
- 3 Kapitel 18.3. Frekvensegenskaper
- 4 Kapitel 18.4. Stabilitet
- 5 Kapitel 18.5. Statisk noggrannhet
- 6 Kapitel 18.6. Insvägningsförlopp (transienta förlopp)

Innehåll

- 1 Kapitel 18.1. Skillnad mellan analog och digital reglering
- 2 Kapitel 18.2. Blockschemareduktion
- 3 Kapitel 18.3. Frekvensegenskaper
- 4 Kapitel 18.4. Stabilitet
- 5 Kapitel 18.5. Statisk noggrannhet
- 6 Kapitel 18.6. Insvägningsförlopp (transienta förlopp)

Stegsvar för olika regulatorer

Bilden på sid 327 visar ett återkopplat system. I bilden nedan (se även sid 328-329) visas stegsvaret för det analoga systemet (blå) och för ett diskretiserat system med samplingstiden 1s (grön) respektive 3s (röd).



Figur: Stegsvär för kontinuerliga och diskreta system

- Av bilden på föregående sida framgår att systemet får sämre egenskaper då samplingstiden ökar. Det beror på att styrsignalen inte förändras under samplingsintervallet och alltså baseras på ett inaktuellt värde av utsignalen.
- Av detta kan vi dra följande slutsatser.
 - Ett diskret system har sämre egenskaper än *motsvarande* kontinuerliga system (vilket inte betyder att alla diskreta system är sämre än alla kontinuerliga system).
 - Stabilitetsgränsen och andra egenskaper för ett kontinuerligt system gäller inte om systemet diskretiseras.
 - Stabilitetsgränsen och andra egenskaper för ett diskret system är beroende av samplingstiden.

Innehåll

- 1 Kapitel 18.1. Skillnad mellan analog och digital reglering
- 2 Kapitel 18.2. Blockschemareduktion**
- 3 Kapitel 18.3. Frekvensegenskaper
- 4 Kapitel 18.4. Stabilitet
- 5 Kapitel 18.5. Statisk noggrannhet
- 6 Kapitel 18.6. Insvägningsförlopp (transienta förlopp)

Blockschemareduktion

- Av tabellen på sid 330 framgår att exakt samma regler för blockschemareduktion gäller för både kontinuerliga och diskreta system.
- Övningsuppgift 18.1a

Innehåll

- 1 Kapitel 18.1. Skillnad mellan analog och digital reglering
- 2 Kapitel 18.2. Blockschemareduktion
- 3 Kapitel 18.3. Frekvensegenskaper**
- 4 Kapitel 18.4. Stabilitet
- 5 Kapitel 18.5. Statisk noggrannhet
- 6 Kapitel 18.6. Insvägningsförlopp (transienta förlopp)

Amplitudförstärkning och fasvridning

- Mappningen från s-planen (Laplace) till z-planen (z-transform) bygger på att vi sätter $z = e^{sh}$, där h är samplingstiden.
- För att beräkna ett systems frekvensegenskaper sätter vi som bekant $s = j\omega$, vilket ger $z = e^{j\omega h}$.
- För ett kontinuerligt system, som har överföringsfunktionen $G(s)$, gäller som bekant att amplitudfunktionen, $A(\omega) = |G(j\omega)|$ och fasfunktionen, $\varphi(\omega) = \arg(G(j\omega))$.
- Detta innebär att för ett diskret system, med överföringsfunktionen $H(z)$, är amplitudfunktionen, $A(\omega) = |H(e^{j\omega h})|$ och fasfunktionen, $\varphi(\omega) = \arg(H(e^{j\omega h}))$
- Kom ihåg, vad gäller komplexa tal, att $e^{jx} = \cos x + j \sin x$.
- Övningsuppgift 18.3a, eventuellt även 18.3c

Lågfrekvensförstärkning

- Lågfrekvensförstärkningen,

$$K_{LF} = \lim_{\omega \rightarrow 0} |H(e^{j\omega h})| = |H(e^0)| = |H(1)|$$

- Lägg märke till skillnaden på slutvärdessatsen, som gäller en signal, och lågfrekvensförstärkningen, som gäller en överföringsfunktion.
- Övningsuppgift 18.4a

Bodediagram

- Bodediagram är inte alls lika vanliga för diskreta system som för kontinuerliga. Dels är de inte lika användabara, dels är de svårare att rita för hand.
- På sid 334 visas bodediagrammet för $H(z) = \frac{1}{z-0.7}$ med samplingstiden, $h = 2s$. Beräkning av amplitud- och fasfunktion för detta filter finns på sid 332-333.
- Följande är typiskt för diskreta system:
 - Amplitudkurvan upprepar sig periodiskt när frekvensen nått samplingsfrekvensen, vilken är $\frac{2\pi}{h}$. Frekvensen är lika med samplingsfrekvensen.
 - Fasfunktionen konvergerar inte utan $\varphi \rightarrow -\infty$ då $\omega \rightarrow \infty$.

Shannons samplingsteorem

- Shannons samplingsteorem säger att om samplingsfrekvensen är mindre än dubbla högsta frekvensen i den samplade signalen, $f_s < 2f$, kommer sampelvärdena inte att överensstämja med den samplade signalen.
- Vad som händer är att en signal med hög frekvens misstolkas som en annan signal med låg frekvens, se bild sid 335. Detta fenomen kallas *aliasseffekten*.
- För att undvika aliasseffekt måste signalen filtreras med ett lågpassfilter innan den samplas, så att högfrekventa komponenter försvinner.

Innehåll

- 1 Kapitel 18.1. Skillnad mellan analog och digital reglering
- 2 Kapitel 18.2. Blockschemareduktion
- 3 Kapitel 18.3. Frekvensegenskaper
- 4 Kapitel 18.4. Stabilitet**
- 5 Kapitel 18.5. Statisk noggrannhet
- 6 Kapitel 18.6. Insvägningsförlopp (transienta förlopp)

Olika sätt att avgöra om ett system är stabilt

- Stabilitet innebär (här) att om signalen har ett maxvärde har utsignalen också ett maxvärde.
- Olika metoder att avgöra om ett system är stabilt är polbestämning, bode-diagram, Nyquistkriteriet och Schur-Coons kriterium.

Polbestämning

- 1 Beräkna systemets poler. Dessa är rötterna till systemets karakteristiska ekvation. Den karakteristiska ekvationen fås genom att sätta överföringsfunktionens nämnare lika med 0.

Exempel: Överföringsfunktionen $H(z) = \frac{1}{z-2}$ har den karakteristiska ekvationen $z - 2 = 0$.

- 2 Lös den karakteristiska ekvationen.

Exempel: $z - 2 = 0$ har lösningen $z = 2$. Systemet har alltså en pol som ligger $z = 2$.

- 3 Om alla poler ligger innanför enhetscirkeln i det komplexa z -planet är systemet stabilt.

Exempel: Eftersom $|2| = 2 > 1$ är detta system *inte* stabilt.

Polbestämning, forts

- Hur lätt polbestämning är avgörs av den karakteristiska ekvationens gradtal. Om det är en första- eller andragradsekvationen är det lätt, annars krävs ett program i stil med Matlab. Har vi tillgång till ett sådant program är det å andra sidan alltid tämligen enkelt att använda polbestämning.
- Övningsuppgift 18.6c-d, 18.7a, eventuellt 18.7b

Bodediagram och Nyquistkriteriet

- Dessa metoder fungerar exakt som för kontinuerliga system.
- Eftersom dessa diagram är mycket svåra att rita för hand för diskreta system kräver denna metod i praktiken tillgång till exempelvis Matlab. I Matlab kan kommandot `margin(G)` användas för att bestämma amplitud- och fasmarginalen för ett system med överföringsfunktionen G oavsett om systemet är diskret eller kontinuerligt.
- Vi ägnar oss inte vidare åt dessa metoder.

Schur-Coons stabilitetskriterium

- Detta är den diskreta motsvarigheten till Rouths metod. Schur-Coons stabilitetskriterium är en enkel metod att manuellt avgöra om ett system är stabilt.
- Dess starka sida är att den fungerar bra utan hjälpmedel oavsett systemets gradtal.
- Dess svaga sida är att den, jämfört med datorbaserade beräkningar, ändå kräver en del jobb. Dessutom blir det ofta väldigt komplexa uttryck om metoden används för algebraiska beräkningar, till exempel att bestämma stabilitetsgränser för förstärkningen.

Schur-Coons stabilitetskriterium, forts

Schur-Coons stabilitetskriterium används så här:

- 1 Ta fram systemets karakteristiska polynom, $A(z)$, dvs överföringsfunktionens nämnare.

Exempel:

$$H(z) = \frac{z^2 + z + 1}{z^3 - z^2 + 0.11z + 0.07} \Rightarrow A(z) = z^3 - z^2 + 0.11z + 0.07$$

- 2 Skriv upp koefficienterna för alla potenser av z .

Exempel: $a_0 = 1, a_1 = -1, a_2 = 0.11, a_3 = 0.07$

- 3 Beräkna $b_i = a_0 a_i - a_n a_{n-i}$ för alla i sådana att $0 \leq i \leq n-1$, där n är det karakteristiska polynomets gradtal.

Exempel: $b_0 = 1^2 - 0.07^2 = 0.9951$

$$b_1 = 1 \cdot (-1) - 0.07 \cdot 0.11 = -1.0077$$

$$b_2 = 1 \cdot 0.11 - 0.07 \cdot (-1) = 0.18$$

Schur-Coons stabilitetskriterium, forts

- 4 Räkna ut c_i, d_i osv på samma sätt som b_i .

Exempel: $c_0 = 0.9951^2 - 0.18^2 \approx 0.9578$

$$c_1 = 0.9951 \cdot (-1.0077) - 0.18 \cdot -1.0077 \approx -0.8214$$

$$d_0 = 0.9578^2 - (-0.8214)^2 \approx 0.2427$$

- 5 Systemet har alla poler strikt inom enhetscirkeln om a_0, b_0, c_0 osv alla är strikt positiva.

Exempel:

$a_0 = 1 > 0, b_0 = 0.9951 > 0, c_0 = 0.9578 > 0, d_0 = 0.2427 > 0 \Rightarrow$
systemet är stabilt.

- Övningsuppgifter: 18.6g

Innehåll

- 1 Kapitel 18.1. Skillnad mellan analog och digital reglering
- 2 Kapitel 18.2. Blockschemareduktion
- 3 Kapitel 18.3. Frekvensegenskaper
- 4 Kapitel 18.4. Stabilitet
- 5 Kapitel 18.5. Statisk noggrannhet**
- 6 Kapitel 18.6. Insvägningsförlopp (transienta förlopp)

- Det kvarstående felet beräknas enligt formlerna på sid 340. Formlerna kan tas fram genom att:
 - 1 Beräkna systemets överföringsfunktion, $H(z)$.
 - 2 Ta fram ett uttryck för felet,
$$E(z) = R(z) - Y(z) = R(z) - R(z)H(z) = R(z)(1 - H(z)).$$
 - 3 Sätta in z-transformen för börvärdet, $R(z)$ i ovanstående uttryck.
 - 4 Använda slutvärdessatsen, $\lim_{k \rightarrow \infty} e(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)E(z)$ för att få fram det kvarstående felet.
- Övningsuppgift 18.10.

Innehåll

- 1 Kapitel 18.1. Skillnad mellan analog och digital reglering
- 2 Kapitel 18.2. Blockschemareduktion
- 3 Kapitel 18.3. Frekvensegenskaper
- 4 Kapitel 18.4. Stabilitet
- 5 Kapitel 18.5. Statisk noggrannhet
- 6 Kapitel 18.6. Insvägningsförlopp (transienta förlopp)**

Polernas betydelse för insvägningsförloppet

- En ändring av insignalen (börvärde eller störning) sätter systemet i svängning. Om alla poler ligger *innanför* enhetscirkeln avtar svängningarna och systemets utsignal når ett slutvärde. Detta, övergående, skede kallas för det *transienta* förloppet.
- Om systemet har mer än en pol kan dess transienta förlopp approximeras med förloppet för ett system med bara den dominanta (längst från origo) polen. Hur bra approximationen blir beror på hur mycket längre från origo än övriga poler den dominanta polen är. Större skillnad ger bättre approximation.

Polernas betydelse för insvägningsförloppet, forts

- Svägningarna avtar snabbare desto närmare origo den dominanta polen ligger. Om systemet har alla poler i origo avtar insvägningen på ett samplingsintervall.
- Om den dominanta polen ligger *utanför* enhetscirkeln tilltar svägningarna mot oändligheten.
- Om den dominanta polen ligger *på* enhetscirkeln kommer svägningarna varken att avta eller tillta, utan fortsätta med oförändrad amplitud.

Polernas betydelse för insvägningsförloppet, forts

- En pol på positiva reella axeln ger ingen oscillation och inte heller någon översväng.
- Desto större vinkeln från den reella axeln till polen är, desto högre frekvens har oscillationen.
- Desto längre från origo en pol som medför oscillation ligger, desto större blir översvängen.
- Om polens vinkel till den reella axeln är $\pm\pi$, dvs polen ligger på den negativa reella axeln, är oscillationsperioden två samplingsintervall.