

Kommentar till elektrostatisk energi

①

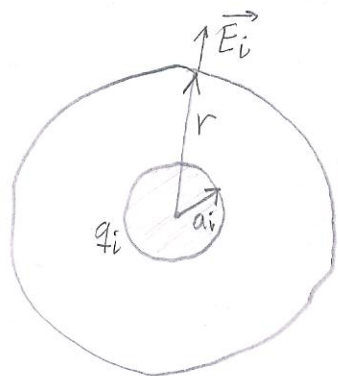
Under övning 3 frågade en student om den inkonsekvens som till synes uppstår mellan energiuttrycken:

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\text{hela rymden}} |\vec{E}|^2 d\vec{r} \quad (2.45 \text{ i Griffiths})$$

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{r_{ij}} \right) \quad (2.41b \text{ i Griffiths})$$

Det första uttrycket ger alltid ett positivt W , medan det andra kan bli positivt eller negativt. Exempelvis är energin av en $+q$ och en $-q$ -laddning: $W = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$. Vad beror detta på?

Skillnaden mellan uttrycken är att uttrycket (2.41b) exkluderar stora positiva termer som ger "self-energy" för varje laddning. Dvs den energi som laddningen har pga det fält som den själv skapar. Tex ger en laddad metallkula med laddningen q_i och radien $r=a_i$ upphov till ett elektriskt fält (via Gauss lag):



$$\vec{E}_i = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \vec{e}_r, \quad r > a_i$$

$$|\vec{E}_i|^2 = \left(\frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \cdot \frac{1}{r^4}, \quad r > a_i$$

Detta fält ger energin för laddningen q_i i sitt eget fält:

$$W_{ii} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_{a_i}^{\infty} \left(\frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \cdot \frac{1}{r^4} \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{q_i^2}{8\pi\epsilon_0 a_i} > 0 \quad (\text{strikt positivt})$$

Då kulans radie $a_i \ll r_{ij}$ enligt ovan, är

$$\frac{q_i^2}{8\pi\epsilon_0 a_i} \gg \left| \frac{q_i q_j}{8\pi\epsilon_0 r_{ij}} \right| \quad \text{för alla } i, j$$

$\Rightarrow W_{ii} \gg |W_{ij}|$ där W_{ij} är "interaction energy" (interakt. energi).

Därmed innebär övergången från (2.41b) till (2.45) att stora positiva "self-energy"-termer läggs till.

Vid definitionen av (2.41b) (enligt procedur som (2.41a) beskrivs på sid 91-92 i Griffiths) har vi explicit räknat bort termerna som uppstår från self-energies, vilket är möjligt att göra i det diskreta fallet. Men om vi ska beräkna en integral över hela den tillgängliga rymden som i (2.45), tex från $r=0$ till $r=\infty$ och över alla vinklar, så kan vi inte räkna bort energibidraget som varje volymelement av laddningsdistributionen får av sitt eget fält.