Föreläsning 4.

1 Eulers ekvationer

Vi ska nu tillämpa Newtons andra lag på en materiell kontrollvolym i en fluid. Som bekant säger Newtons andra lag att tidsderivatan av kontrollvolymens rörelsemängd är lika med summan av alla krafter som verkar på kontrollvolymen. Enligt den integralsats som vi härledde i slutet av föreläsning 3 kan vi skriva tidsderivatan av rörelsemängden som

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathcal{V}} \rho u_j \,\mathrm{d}\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \rho \frac{\mathrm{D}u_j}{\mathrm{D}t}\,\mathrm{d}\mathcal{V}\,. \tag{1}$$

Generellt kan vi dela in de krafter som verkar på fluidelementet i kontaktkrafter, volymskrafter och linjekrafter. Det typiska exemplet på en volymskraft är gravitationskraften och det typiska exemplet på en linjekraft är ytspänning. I denna kurs ska vi inskränka oss till att behandla kontaktkrafter och volymskrafter av vilka det senare endast gravitationskraften. Enligt vad vi tidigare har visat i föreläsning 3 kan vi skriva kontaktkraften som

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i}\,\mathrm{d}\mathcal{V}\,, \tag{2}$$

där τ_{ij} är spänningstensorn. För att teckna ett uttryck för gravitationkraften definierar vi en accelerationsvektor $\mathbf{g}$. Ofta använder vi ett koordinatsystem i vilket z-axeln är den uppåtriktade vertikalaxeln. I detta fall gäller att $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z$. Men ibland är det praktiskt att införa ett annat koordinatsystem och då kommer uttrycket för $\mathbf{g}$ att se annorlunda ut. Gravitationskraften som verkar på kontrollvolymen kan vi nu skriva

$$\int_{\mathcal{V}} \rho g_j \,\mathrm{d}\mathcal{V}\,, \tag{3}$$

och Newtons andra lag kan följaktligen skrivas

$$\int_{\mathcal{V}} \rho \frac{\mathrm{D}u_j}{\mathrm{D}t}\,\mathrm{d}\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i}\,\mathrm{d}\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}} \rho g_j\,\mathrm{d}\mathcal{V}\,. \tag{4}$$

Detta samband gäller för en godtyckligt liten kontrollvolym och därför måste det också gälla punktvis. Vi får alltså

$$\frac{\mathrm{D}u_j}{\mathrm{D}t} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i} + g_j\,. \tag{5}$$

För att detta ska bli en användbar ekvation måste vi teckna ett uttryck för spänningstensorn. En fluid i vilken det inte verkar några friktionskrafter kallar vi en inviskös fluid. En sådan fluid är naturligtvis en idealisering, precis som en inkompressibel fluid också är en idealisering. Men i många sammanhang är det en användbar idealisering. För en inviskös fluid gäller

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij}\,, \tag{6}$$

där p är det termodynamiska trycket. Uttrycket (6) innebär att fluidelementen enbart påverkar varandra med tryckkrafter och att dessa tryckkrafter är normalkrafter som alltid verkar normalt mot en frilagd yta, till skillnad från skjuvkrafter som verkar tangentiellt längs en yta. Minustecknet innebär att tryckkraften alltid är riktad innåt mot en frilagd yta, d v s i motsatt riktning mot dess enhetsnormalvektor $\mathbf{n}$. Om vi använder uttrycket (6) för spänningstensorn får vi

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i} = \frac{\partial(-p\delta_{ij})}{\partial x_i} = -\frac{\partial p}{\partial x_j}\,. \tag{7}$$

Om vi sätter in detta uttryck i (8) så får vi

$$\frac{\mathrm{D}u_j}{\mathrm{D}t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_j} + g_j\,. \tag{8}$$

Detta är i själva verket tre ekvationer ($j = 1, 2, 3$) som kallas för Eulers ekvationer. Om vi skriver ut uttrycket för den materiella derivatan så kan dessa ekvationer också skrivas som

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + u_i\frac{\partial u_j}{\partial x_i} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_j} + g_j\,, \tag{9}$$

och med traditionell vektornotation kan vi skriva

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{g}\,. \tag{10}$$

2 Bernoullis ekvation

Vi inför nu ett koordinatsystem med z-axeln som den uppåtriktade vertikalaxeln, så att $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z$. För gravitationskraften kan vi använda oss av följande identitet

$$-g\mathbf{e}_z = -\nabla(gz)\,. \tag{11}$$

Följande vektorsamband gäller

$$\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} = \nabla\left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}}{2}\right) - \mathbf{u}\times\boldsymbol{\omega}\,. \tag{12}$$

där $\boldsymbol{\omega} = \nabla\times\mathbf{u}$ är vorticiteten. Denna identitet härleds lättast med hjälp Cartesisk tensornotation (övning 1.1). Med hjälp av (11) och (12) kan vi i det inkompressibla fallet skriva om (10) som

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla B = \mathbf{u}\times\boldsymbol{\omega}\,, \tag{13}$$

där vi infört Bernoullis funktion

$$B = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}}{2} + \frac{p}{\rho} + gz\,. \tag{14}$$

Vi betraktar nu en stationär strömning för vilken den första termen i (13) är noll. Ekvationen kan nu integreras utefter en strömlinje. Detta gör vi enklast genom att skalärmultiplicera ekvationen med med strömlinjens tangentialenhetsvektor $\mathbf{e}_t$. Högerledet blir då noll, eftersom $\mathbf{e}_t$ överallt är parallell med $\mathbf{u}$. Alltså får vi

$$\mathbf{e}_t \cdot \nabla B = \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}s} = 0\,, \tag{15}$$

där s är lägeskoordinaten utefter strömlinjen. Från (15) följer att

$$B = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \text{Konstant, utefter en strömlinje}\,. \tag{16}$$

Denna ekvation kallas för Bernoullis ekvation.

Exempel 4.1.

En ubåt färdas horisontellt på djupet d och med hastigheten U. Vattnets densitet är ρ och trycket ovanför vattenytan är atmosfärstryck p_{atm}. Bestäm stagnationstrycket på ubåten (trycket på ubåtens nos).

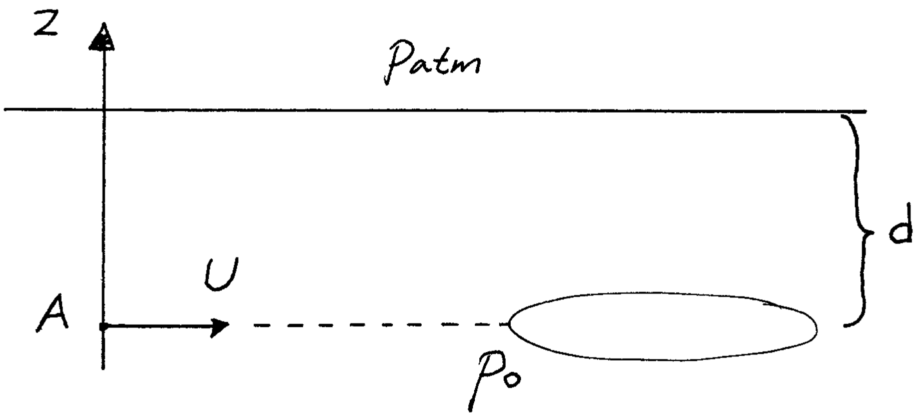

Figure 1: Ubåten färdas till vänster med hastighet U. Men vi betraktar istället problemet i ubåtens system. I detta system är strömningen stationär och vattnet färdas mot ubåten med hastigheten U åt höger.

Lösning

Betrakta en punkt A på samma djup som ubåtens nos men långt uppströms ubåten. I vattenpelaren ovanför A råder hydrostatisk balans

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g \quad \Rightarrow \quad p = -\rho g z + C\,. \tag{17}$$

Randvillkoret ger

$$p = p_{atm} \quad \text{då} \quad z = 0 \quad \Rightarrow \quad C = p_{atm}\,, \tag{18}$$

och

$$p = p_{atm} - \rho g z\,, \quad p_A = p_{atm} + \rho g d\,. \tag{19}$$

I ett koordinatsystem som följer med ubåten så är strömningen stationär och Bernoullis ekvation gäller för en strömlinje mellan punkten A och stagnationspunkten. Alltså får vi

$$\frac{p_A}{\rho} + \frac{1}{2}U^2 = \frac{p_0}{\rho} \quad \Rightarrow \quad p_0 = p_{atm} + \rho g d + \frac{1}{2}\rho U^2 \,. \tag{20}$$

Exempel 4.2.

Vatten spolas från en cylindrisk kran med radien r_0. Dess hastighet vid utloppet är v_0. Bestäm formen på strålen!

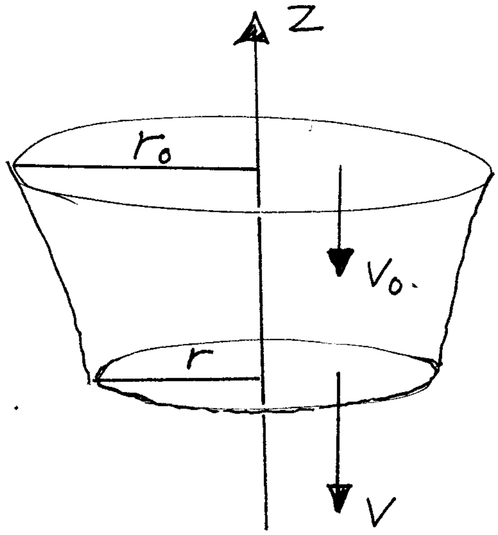

Figure 2: En vattenstråle lämnar kranen med hastigheten v_0. Även om strålen smalnar av något kan vi anta att hastigheten är vertikal och inte varierar med r.

Även om strålen smalnar av något kan vi med god approximation anta att hastigheten är vertikal. Volymsflödet i strålen måste vara konstant, vilket ger ett samband mellan hastigheten v och strålens radie r:

$$\pi r^2 v = \pi r_0^2 v_0 \quad \Rightarrow \quad v = \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 v_0 \,. \tag{21}$$

På randen av vattenstrålen gäller att trycket är atmosfärstryck och Bernoullis ekvation tillämpad på en strömlinje som följer randen ger således

$$\frac{1}{2}v_0^2 = \frac{1}{2}v^2 + gz \,. \tag{22}$$

Från dessa två ekvationer får vi strålens radie som funktion av z:

$$r = \left(\frac{1}{1 - 2gz/v_0^2}\right)^{1/4} r_0 \,. \tag{23}$$

Observera att z är negativ. Ju längre från utloppet desto större är $|z|$. Strålen smalnar alltså av.

3 Rörelsemängdsekvationen på integralform

Vi härledde tidigare momentekvationen (8) genom att betrakta en materiell kontrollvolym. Nu ska vi istället integrera samma ekvation över en fix kontrollvolym. Om vi multiplicerar (8) med ρ och integrerar så får vi

$$\int_V \rho \frac{\partial u_j}{\partial t}\,\mathrm{d}V + \int_V \rho u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\,\mathrm{d}V = \int_V \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i}\mathrm{d}\,V + Mg_j\,. \tag{24}$$

där M är kontrollvolymens massa. För en inkompressibel fluid gäller att

$$\rho u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i u_j)\,. \tag{25}$$

Nu sätter vi in (25) i (24) och skriver om två av volymsintegralerna till ytintegraler med hjälp av Gauss sats:

$$\int_V \rho \frac{\partial u_j}{\partial t}\,\mathrm{d}V + \int_S \rho n_i u_i u_j\,\mathrm{d}S = \int_S n_i \tau_{ij}\mathrm{d}\,S + Mg_j \tag{26}$$

där S är kontrollvolymens begränsningsyta och $\mathbf{n}$ dess utåtriktade enhetsnormalvektor. Den andra termen i vänsterledet kallas för rörelsemängsflödet. Observera att det är flödet *ut* ur kontrollvolymen, eftersom $\mathbf{n}$ är den utåtriktade enhetsnormalvektorn. Den första termen i högerledet är ingenting annat än kontaktkraften på kontrollvolymen från omgivningen. I det stationära fallet kan vi med vektornotation skriva ekvation (26) som

$$\int_S \rho \mathbf{n}\cdot\mathbf{u}\,\mathbf{u}\,\mathrm{d}S = \mathbf{F}^k + M\mathbf{g}\,, \tag{27}$$

där $\mathbf{F}^k$ är kontaktkraften på kontrollvolymen från omgivningen. Denna ekvation används ofta för att bestämma kraften mellan en fluid och en närbelägen kropp.

Exempel 4.3
En vattenstråle träffar under rät vinkel en plan stillastående platta platta enligt figur 3. Strålen har ett cirkulärt tvärsnitt med radien r. Vattnets hastighet är U och dess densitet är ρ. Strålen avlänkas över hela plattans area som är A. Det omgivande trycket är p_{atm}, också vid strålens inlopp och utlopp. Bestäm

a) Kraften på plattan från strålen.
b) Kraften på plattan från den omgivande luften.
c) Den totala kraften på plattan.

Lösning

a)
Vi frilägger strålen från plattan. Kraften på strålen från plattan kan vi skriva som $-F\mathbf{e}_x$. Kontrollvolymens begränsingsyta, S, kan vi dela upp i två delar: S_1 som är den yta som gränsar mot plattan och S_2 som är den övriga ytan där atmosfärstrycket verkar. Vi betecknar inloppsytan med D. Momentekvationen i integralform kan vi nu skriva

$$\int_D \rho \mathbf{u}\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S = -F\mathbf{e}_x - \int_{S_2} p_{atm}\mathbf{n}\,\mathrm{d}S \tag{28}$$

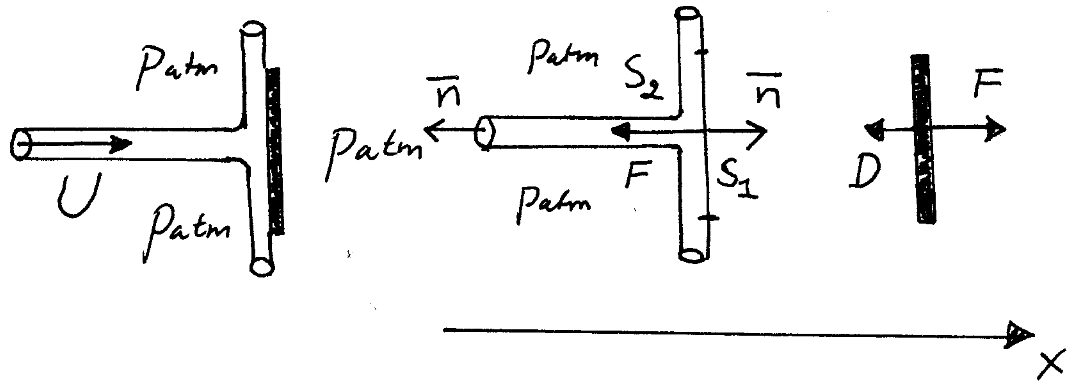

Figure 3: Kraften på plattan från strålen är lika stor som kraften på strålen från plattan. Denna beräknar vi genom att tillämpa momentekvationen på integralform. S_1 är den del av kontrollvolymens begränsingsyta som gränsar mot plattan. S_2 är den övriga begränsingsytan.

där den sista termen är kraften från den omgivande atmosfären på den del av kontrollvolymen som inte gränsar mot plattan. En konstant tryckkraft som verkar på ett föremål från alla håll kan inte ge någon nettokraft. Därför har vi att

$$\int_{S_1} p_{atm}\mathbf{n}\,\mathrm{d}S + \int_{S_2} p_{atm}\mathbf{n}\,\mathrm{d}S = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \int_{S_2} p_{atm}\mathbf{n}\,\mathrm{d}S = -\int_{S_1} p_{atm}\mathbf{n}\,\mathrm{d}S = -p_{atm}A\mathbf{e}_x \tag{29}$$

Ekvation (28) och (29) ger nu

$$-\rho U^2\pi r^2 = -F + p_{atm}A \quad \Rightarrow \quad F = \rho U^2\pi r^2 + p_{atm}A \tag{30}$$

Enligt Newtons tredje lag är F också kraften på plattan från strålen.

b)

Kraften på plattan från den omgivande luften är

$$D = p_{atm}A\,, \tag{31}$$

riktad till vänster enligt figuren.

c)

Den totala kraften på plattan måste vara noll, eftersom den befinner sig i jämvikt. Förutom kraften från strålen och kraften från den omgivande luften så måste det alltså finnas en tredje kraft. Exempelvis så är plattan fastskruvad någonstans.