KTH Teknikvetenskap

SF1626 Flervariabelanalys
Lösningsförslag till kontrollskrivning 1
Måndagen den 12 september, 2011

1. Beräkna

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z}$$

om $f(x, y, z) = \ln(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$. Förenkla svaret så långt som möjligt. **(4)**

LÖSNINGSFÖRSLAG

För att beräkna uttrycket behöver vi först bestämma de tre partialderivatorna $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ och $\partial f/\partial z$. Vi kan här dra fördel av att funktionen f är symmetrisk i x, y och z, och bara bestämma en av partialderivatorna,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\ln(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz) \\
&= \frac{1}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz\right) \\
&= \frac{1}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz} \cdot (3x^2 - 3yz) \\
&= \frac{3(x^2 - yz)}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz}.
\end{aligned}$$

Via symmetrin får vi direkt att

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{3(y^2 - xz)}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz} \quad \text{och} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{3(z^2 - xy)}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz}.$$

Detta ger att

$$
\begin{aligned}
x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{3x(x^2 - yz)}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz} + \frac{3y(y^2 - xz)}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz} \\
&\qquad + \frac{3z(z^2 - xy)}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz} \\
&= \frac{3(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz} \\
&= 3.
\end{aligned}
$$

2. Beräkna riktningsderivatan av $f(x, y, z) = x^2 e^{y-1} + xz$ i punkten $(3, 1, -3)$ och i samma riktning som $\boldsymbol{v} = (2, 2, 1)$. **(4)**

LÖSNINGSFÖRSLAG

Riktningsderivatan av den differentierbara funktionen f i punkten $(3, 1, -3)$ och i riktningen $\hat{\boldsymbol{v}}$ kan vi beräkna med formeln

$$f'_{\boldsymbol{v}}(3, 1, -3) = \nabla f(3, 1, -3) \cdot \hat{\boldsymbol{v}}.$$

Gradienten av f är lika med

$$\nabla f = \left(f'_x, f'_y, f'_z\right) = \left(2xe^{y-1} + z, x^2 e^{y-1}, x\right)$$

vilket ger att $\nabla f(3, 1, -3) = (3, 9, 3)$. För att få enhetsvektorn $\hat{\boldsymbol{v}}$ i samma riktning som $\boldsymbol{v}$ normerar vi $\boldsymbol{v}$,

$$\hat{\boldsymbol{v}} = \frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|} = \frac{(2, 2, 1)}{|(2, 2, 1)|} = \frac{(2, 2, 1)}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{(2, 2, 1)}{3} = \left(\tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}\right).$$

Den sökta riktningsderivatan är

$$f'_{\hat{\boldsymbol{v}}}(3, 1, -3) = \nabla f(3, 1, -3) \cdot \hat{\boldsymbol{v}} = (3, 9, 3) \cdot \left(\tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}\right) = 2 + 6 + 1 = 9.$$

3. En rak cirkulär kons mantelyta har en area som ges av

$$A(r, h) = \pi r \sqrt{r^2 + h^2},$$

där r är bottenytans radie och h är konens höjd (båda mätt i meter).

a) Linjarisera areafunktionen $A(r, h)$ kring $(r, h) = (6, 8)$. **(2)**

b) Använd a-uppgiften för att bestämma en ekvation för tangentplanet till funktionsytan $z = A(r, h)$ i rhz-rummet, i den punkt på ytan där $r = 6$ och $h = 8$. **(1)**

c) Använd a-uppgiften för att *approximativt* beräkna hur mycket arean ändras då radien ökas från $r = 6$ till $r = 6{,}5$ meter och höjden minskas från $h = 8$ till $h = 7{,}9$ meter. **(1)**

LÖSNINGSFÖRSLAG

a) Linjariseringsformeln lyder

$$A(6+\Delta r, 8+\Delta h) = A(6,8) + \frac{\partial A}{\partial r}(6,8)\Delta r + \frac{\partial A}{\partial h}(6,8)\Delta h + \text{Restterm},$$

där

$$\begin{aligned}
A(6,8) &= \pi \cdot 6 \cdot \sqrt{6^2+8^2} = \pi \cdot 6 \cdot 10 = 60\pi,\\
\frac{\partial A}{\partial r}(6,8) &= \frac{\partial}{\partial r}\,\pi r\sqrt{r^2+h^2}\,\Big|_{\substack{r=6\\h=8}} = \pi\sqrt{r^2+h^2} + \frac{\pi r^2}{\sqrt{r^2+h^2}}\,\Big|_{\substack{r=6\\h=8}} = \frac{68\pi}{5},\\
\frac{\partial A}{\partial h}(6,8) &= \frac{\partial}{\partial h}\,\pi r\sqrt{r^2+h^2}\,\Big|_{\substack{r=6\\h=8}} = \frac{\pi r h}{\sqrt{r^2+h^2}}\,\Big|_{\substack{r=6\\h=8}} = \frac{24\pi}{5}.
\end{aligned}$$

Alltså är

$$A(6+\Delta r, 8+\Delta h) = 60\pi + \frac{68\pi}{5}\Delta r + \frac{24\pi}{5}\Delta h + \text{Restterm}$$

b) Ekvationen för tangentplanet till ytan $z = A(r,h)$ i punkten $(r,h) = (6,8)$ fås genom att i ytans ekvation $z = A(r,h)$ ersätta högerledet med areafunktionens linjarisering (utan resttermen), dvs

$$z = 60\pi + \frac{68\pi}{5}\Delta r + \frac{24\pi}{5}\Delta h,$$

och eftersom $r = 6+\Delta r$ och $h = 8+\Delta h$ så kan ekvationen skrivas som

$$z = 60\pi + \frac{68\pi}{5}(r-6) + \frac{24\pi}{5}(h-8).$$

c) Linjariseringsformeln ger approximationen

$$\begin{aligned}
A(6{,}5;7{,}9) = A(6+0{,}5;8-0{,}1) &\approx 60\pi + \frac{68\pi}{5}\cdot 0{,}5 + \frac{24\pi}{5}\cdot(-0{,}1)\\
&= \frac{1658\pi}{25} \approx 208{,}4.
\end{aligned}$$

Jämför detta med det sanna värdet $A(6{,}5;7{,}9) = 208{,}9$ (avrundat till en decimal).

Svar:

1. $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} + z\dfrac{\partial f}{\partial z} = 3$ 2. $f'_{\hat{\mathbf{v}}}(3,1,-3) = 9$

3. a) $A(6+\Delta r, 8+\Delta h) = 60\pi + \dfrac{68\pi}{5}\Delta r + \dfrac{24\pi}{5}\Delta h + \text{Restterm}$

   b) $z = 60\pi + \dfrac{68\pi}{5}(r-6) + \dfrac{24\pi}{5}(h-8)$

   c) $A(6+0{,}5;8-0{,}1) - A(6,8) \approx \dfrac{1658\pi}{25} - 60\pi = \dfrac{158\pi}{25}$