Några satser i den linjära algebran.

Sats 1.20. Låt **u** vara en riktningsvektor för linjen L. Den ortogonala projektionen $\mathbf{v}_L$ av vektorn **v** på L ges då av $\mathbf{v}_L = \dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}}\mathbf{u}$. Speciellt är $\|\mathbf{v}_L\| = \dfrac{|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}|}{\|\mathbf{u}\|}$.

Sats 3.11 (Bassatsen). Låt $f : R^2 \to R^2$ eller $f : R^3 \to R^3$ vara en linjär avbildning. Då gäller att $f = f_A$ för en matris A d.v.s. f är en matrisavbildning där $A = \left(f(\mathbf{e}_x) \quad f(\mathbf{e}_y)\right)$ eller $A = \left(f(\mathbf{e}_x) \quad f(\mathbf{e}_y) \quad f(\mathbf{e}_z)\right)$ respektive.

Sats 3.12. Varje matrisavbildning är en linjär avbildning och omvänt är varje linjär avbildning på en mängd geometriska vektorer en matrisavbildning (och där tillhörande matris beräknas med hjälp av Bassatsen).

Sats 3.16. Ortogonal projektion på en linje är en linjär avbildning.

Sats 3.18. Rotationen kring origo i planet är en linjär avbildning. Matrisen för rotationen vinkeln β i positiv riktning (moturs) är $\begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$.

Proposition 3.22. Låt f och g vara två linjära avbildningar med tillhörande $n \times n -$matriser A och B d.v.s. så att $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ och $g(\boldsymbol{x}) = B\boldsymbol{x}$. Då följer det att de sammansatta avbildningarna $f \circ g$ och $g \circ f$ blir linjära med matriserna AB och BA respektive d.v.s. $\left(f \circ g\right)(\boldsymbol{x}) = (AB)\boldsymbol{x}$ och $\left(g \circ f\right)(\boldsymbol{x}) = (BA)\boldsymbol{x}$.

Anmärkning 3.23. Det faktum att för matriser A och B i allmänhet gäller att $AB \neq BA$ ger för de sammansatta funktionerna $f_A \circ g_B$ och $g_B \circ f_A$ i allmänhet att $f_A \circ g_B \neq g_B \circ f_A$.

Definition 3.35. En affin avbildning f är en sammansättning $f = t_b \circ g_A$ av en linjär avbildning g_A och en translation t_b. Med andra ord så är $f(\mathbf{x}) = t_b(g_A(\mathbf{x})) = t_b(A\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ för en matris A och en vektor **b**.

Proposition 3.36. Sammansättningen av två affina avbildningar är en affin avbildning. Mer exakt, om $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ och $g(\mathbf{x}) = C\mathbf{x} + \mathbf{d}$ så är $(f \circ g)(\mathbf{x}) = (AC)\mathbf{x} + (A\mathbf{d} + \mathbf{b})$.

Extra Proposition. Den affina avbildningen $f : R^n \to R^n$ genom $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ har en direkt motsvarighet i en linjär avbildning $g : R^{n+1} \to R^{n+1}$ genom

$$g\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \hline 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & |\,\mathbf{b} \\ \hline 0\ldots0 & |\,1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \hline 1 \end{pmatrix}$$

OBS: En affin avbildning är i allmänhet <u>inte</u> en linjär avbildning.