KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Lösningsförslag med bedömningskriterier till modellkontrollskrivning 2
2010

UPPGIFT

(1) Välj ut tre av de fem vektorerna $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 1)$, $\mathbf{e}_2 = (1, -2, 1)$, $\mathbf{e}_3 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{e}_4 = (2, 3, 2)$ och $\mathbf{e}_5 = (1, 0, 2)$ så att dessa utgör en bas för $\mathbb{R}^3$ och beräkna koordinaterna för vektorn $(1, 1, 1)$ med avseende på denna bas. **(4)**

(2) Bestäm bilden av det kvadratiska området med hörn i $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(1, 4)$ och $(0, 3)$ under avbildningen $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ med standardmatris

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

(4)

(3) Bestäm matrisen för den linjära avbildning T från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^3$ som uppfyller

$$T(\overline{u}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad T(\overline{v}) = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

där $\overline{u} = (1, 4)^t$ och $\overline{v} = (2, 9)^t$. **(4)**

(1) Vi kan ställa upp de fem vektorerna som kolonner i en matris för att finna eventuella linjära beroenden med hjälp av Gausselimination. De kolonner som har ledande ettor måste vara linjärt oberoende och om det finns tre av dem utgör dessa tre kolonner i den ursprungliga matrisen också en bas för $\mathbb{R}^3$. Om vi har med vektorn $(1,1,1)$ som högerled kommer vi samtidigt att kunna se vilken linjärkomination av de tre basvektorerna som ger $(1,1,1)$, vilket är detsamma som att bestämma koordinaterna för $(1,1,1)$ med avseende på denna bas.

Vi får med Gausselimination:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} r_1 \\ -\frac{1}{2}r_2 \\ r_3 - r_1 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} r_1 - r_3 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} r_1 - r_2 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

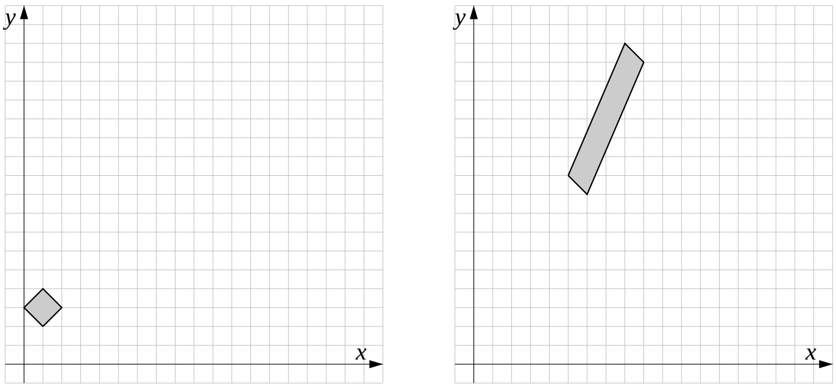
Eftersom de ledande ettorna är i kolonn 1, 2 och 5 utgör vektorerna $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ och $\mathbf{e}_5$ en bas för $\mathbb{R}^3$. Dessutom ser vi genom att totalmatrisen är på reducerad trappstegsform att vektorn $(1,1,1)$ kan skrivas som

$$\frac{3}{2} \cdot \mathbf{e}_1 - \frac{1}{2} \cdot \mathbf{e}_2 + 0 \cdot \mathbf{e}_5$$

och koordinaterna för $(1,1,1)$ i basen $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_5\}$ är därmed $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$.

(2) Linjära avbildningar avbildar linjestycken på linjestycken och parallella linjer på parallella linjer. Därmed får vi bilden av det kvadratiska området som en parallellogram med hörnpunkter som ges av bilderna av hörnpunkterna. Vi har att

$$
\begin{aligned}
T(1,2) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 2 \\ 4\cdot 1 + 3\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}, \\
T(2,3) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 + 2\cdot 3 \\ 4\cdot 2 + 3\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 17 \end{pmatrix}, \\
T(1,4) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 4 \\ 4\cdot 1 + 3\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 16 \end{pmatrix}, \\
T(0,3) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 0 + 2\cdot 3 \\ 4\cdot 0 + 3\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$



FIGUR 1. Det kvadratiska området och bilden av det under T.

(3) För att bestämma matrisen för avbildningen behöver vi bestämma dess värde på standardbasvektorerna $(1,0)^t$ och $(0,1)^t$. Eftersom vi känner värdena på $\overline{u}$ och $\overline{v}$ behöver vi uttrycka standardbasvektorerna som linjärkombinationer av $\overline{u}$ och $\overline{v}$. Vi kan lösa båda dessa problem samtidigt genom att använda dubbla högerled och får då totalmatrisen

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 9 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 - 4r_1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} r_1 - 2r_2 \\ r_2 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 9 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \end{array}\right)$$

Alltså har vi att $(1,0)^t = 9\overline{u} - 4\overline{v}$ och därmed

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = T(9\overline{u} - 4\overline{v}) = 9T(\overline{u}) - 4T(\overline{v}) = 9\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix}$$

och $(0,1)^t = -2\overline{u} + \overline{v}$

$$T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = T(-2\overline{u} + \overline{v}) = -2T(\overline{u}) + T(\overline{v}) = -2\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Alltså ges matrisen för T av

$$A = \begin{pmatrix} 35 & -8 \\ 2 & 0 \\ -9 & 2 \end{pmatrix}$$

Vi kan kontrollera att

$$\begin{pmatrix} 35 & -8 \\ 2 & 0 \\ -9 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \cdot 1 - 8 \cdot 4 \\ 2 \cdot 1 + 0 \cdot 4 \\ -9 \cdot 1 + 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

och

$$\begin{pmatrix} 35 & -8 \\ 2 & 0 \\ -9 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \cdot 2 - 8 \cdot 9 \\ 2 \cdot 2 + 0 \cdot 9 \\ -9 \cdot 2 + 2 \cdot 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Svar:

(1) $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_5\}$ utgör en bas för $\mathbb{R}^3$ och koordinaterna för $(1,1,1)$ i denna bas är $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$.

(2) Bilden är parallellogrammen med hörn i punkterna $(5,10)$, $(8,17)$, $(9,16)$ och $(6,9)$.

(3) Matrisen för avbildningen är $A = \begin{pmatrix} 35 & -8 \\ 2 & 0 \\ -9 & 2 \end{pmatrix}$

BEDÖMNINGSKRITERIER

Mindre räknefel ger i allmänhet inget avdrag, om de inte väsentligt ändrar uppgiftens karaktär.

(1)
- Korrekt metod för att bestämma tre av vektorerna som kan användas som bas, **1 poäng**.
- Korrekt motiverad bas, **1 poäng**.
- Korrekt metod för att bestämma koordinaterna för $(1, 1, 1)$, **1 poäng**.
- Korrekt slutförd beräkning av koordinaterna, **1 poäng**.

(2)
- Korrekt beräkning av bilden av ett av hörnen, **1 poäng**.
- Korrekt beräkning av återstående hörn, **1 poäng**.
- Korrekt motiverad bild av området, **1 poäng**.
- Korrekt figur, **1 poäng**.

(3)
- Korrekt uppställt ekvationssystem för att bestämma bilderna av standardbasvektorerna, **1 poäng**.
- Korrekt metod för att lösa ekvationssystemet, **1 poäng**.
- Korrekt utförd lösning av ekvationssystemet, **1 poäng**.
- Korrekt motiverad slutsats om matrisen för T, **1 poäng**.