



KTH Teknikvetenskap

SF1624 ALGEBRA OCH GEOMETRI SEMINARIEUPPGIFTER OCH REKOMMENDERADE UPPGIFTER FÖR VECKA 4 HT10

Se www.kth.se/social/course/SF1624 för information om hur seminarierna fungerar och vad du förväntas göra inför och under seminarierna.

UPPGIFTER TILL SEMINARIE 4

Uppgift 1. Låt $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ och $B' = \{f_1, f_2, f_3\}$ vara två baser för rummet \mathbb{R}^3 . Antag att vi har relationerna

$$e_1 = f_1 + 2f_2$$

$$e_1 + e_2 = f_3$$

$$2e_3 + 3f_2 = 0.$$

- Beskriv basbytesmatrisen P från basen B till basen B' .
- Beskriv basbytesmatrisen Q från basen B' till basen B .
- Låt $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildning sådan att matrisrepresentationen $[T]_{B',B} = P$. Beskriv geometrisk vad avbildningen T gör.

Uppgift 2. En linjär avbildning $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definieras genom att varje vektor i \mathbb{R}^3 speglas i planet $x + 2y + z = 0$. Bestäm avbildningens matris med avseende på någon bas.

Uppgift 3. Vi betraktar en sammansatt avbildning $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T = T_2 \circ T_1$ där T_1 svarar mot spegling i origo medan T_2 definieras genom att varje vektor i \mathbb{R}^3 projiceras ortogonalt på planet $3x + y + z = 0$.

- Bestäm koordinaterna till $T(1, 2, 3)$.
- Bestäm en matrisrepresentation för T med avseende på någon bas.
- Bestäm nollrummet (kernel), till avbildningen T .
- Bestäm värderummet (range), till (T) .
- Bestäm en bas för nollrummet.
- Bestäm en bas för värderummet.

Uppgift 4. Betrakta matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Vi tänker oss att $A = [T]_{B',B}$ representerar en linjär avbildning $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, med avseende på två baser B och B' .

- Om B och B' båda är standardbasen, beskriv geometriskt vad avbildningen T gör med planet. Rita speciellt ut vad som händer med enhetskvadraten med hörn i punkterna $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ och $(0, 1)$.
- Låt B vara standardbasen, och låt T vara identitetsavbildningen. Bestäm B' .
- Låt B' vara standardbasen, och låt T vara identitetsavbildningen. Bestäm B .
- Låt B vara standardbasen, och låt avbildningen T vara rotation med π -radianer (180 grader) omkring origo. Bestäm B' .
- Låt T vara projektionen ned på linjen $x = y$. Varför finns det inte baser B och B' sådan att $A = [T]_{B',B}$?

Uppgift 5. Låt $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara en linjär avbildning, och betrakta matrisrepresentationer med avseende på en och samma bas B för både domän och målmängd. (Med notation från boken så menas nu matriser på formen $[T]_{B,B}$).

- Låt B vara en bas sådan att $[T]_{B,B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Visa att det finns en bas B' sådan att

$$[T]_{B',B'} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -\frac{3}{2} & -1 \end{bmatrix}.$$

- Redogör varför matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ och matrisen $A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ inte kan representera samma avbildning. Dvs, det finns ingen bas B sådan att $A = [T]_{B,B}$ och en bas B' sådan att $A' = [T]_{B',B'}$ för en och samma avbildning T .

REKOMMENDERADE UPPGIFTER

Utöver ovanstående seminarieuppgifter rekommenderas följande uppgifter från kursboken till självstudier och övningar:

Kapitel 4 — Allmänna vektorrum		
4.9	Matristransformationer från \mathbb{R}^n till \mathbb{R}^m	9, 11, 17, 21
4.10	Egenskaper hos matristransformationer	5, 9, 15, 21, 23
Kapitel 8 — Linjära avbildningar		
8.1	Allmänna linjära avbildningar	7, 11, 13, 23
8.2	Isomorfier	5, 9, 11, 17
8.3	Sammansättning av linjära avbildningar	3, 9, 15
8.4	Matriser för allmänna linjära avbildningar	5, 7, 13