Föreläsning 6.

1 Två stationära lösningar i cylindergeometri

Exempel 6.1 Strömning utanför en roterande cylinder

En mycket lång (oändligt lång) roterande cylinder är nedsänkt i vatten. Rotationsaxeln är vertikal, cylinders vinkelhastighet är Ω och dess radie är R. Bestäm
a) hastighetsfältet i vattnet,
b) formen av den fria vattenytan,
c) och spänningen på cylindern.

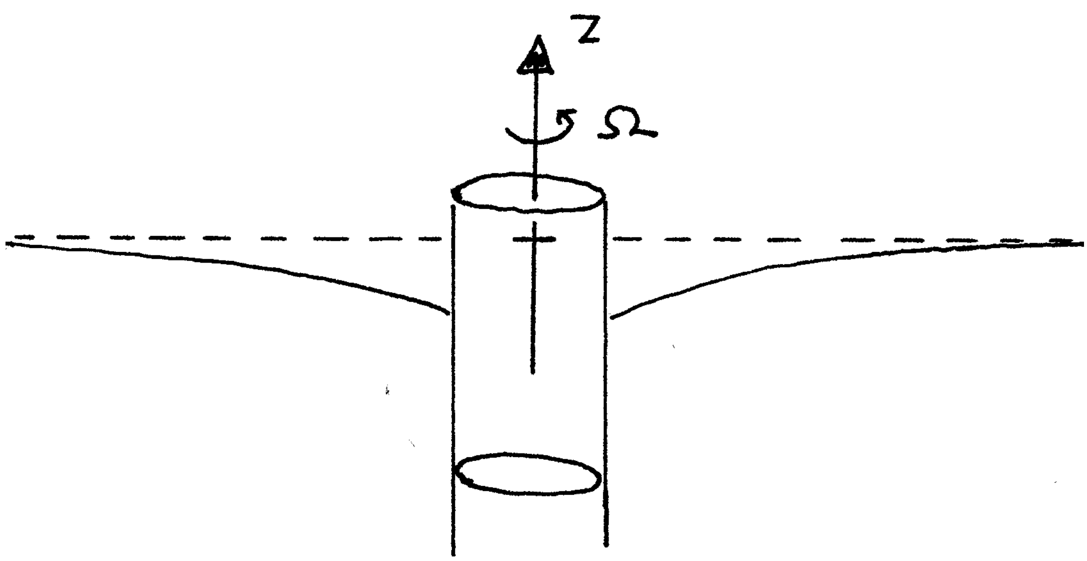

Figure 1: En roterande cylinder som är nedsänkt i vatten generar en virvel omkring sig i vattnet. I en virvel sjunker trycket mot centrum. Därför kommer den omgivande vattenytan att sjunka kring cylindern.

Lösning

a) Navier-Stokes ekvationer i cylinderkoordinater kan skrivas (se Appendix A)

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)u_r - \frac{u_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left(\nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}\right), \tag{1}$$

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)u_\theta + \frac{u_r u_\theta}{r} = -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial\theta} + \nu\left(\nabla^2 u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}\right), \tag{2}$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)u_z = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\nabla^2 u_z - g\,, \tag{3}$$

där

$$\mathbf{u}\cdot\nabla = u_r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + u_z\frac{\partial}{\partial z}\,. \tag{4}$$

Av symmetriskäl så har vi ingen variation i θ-led. Till att börja med kan vi anta att hastighetsfältet är en funktion av r och (möjligen) z. Randvillkoren för hastighetskomponenterna är

$$u_\theta = \Omega R \quad \text{då} \quad r = R \quad \text{och} \quad u_\theta \to 0 \quad \text{då} \quad r \to \infty\,, \tag{5}$$

$$u_r = u_z = 0 \quad \text{då} \quad r = R \quad \text{och} \quad u_r\,, u_z \to 0 \quad \text{då} \quad r \to \infty\,. \tag{6}$$

Givet dessa randvillkor är det naturligt att söka en lösning av formen $\mathbf{u} = u_\theta(r)\mathbf{e}_\theta$. Vi antar alltså att $u_r = u_z = 0$ och att u_θ endast är en funktion av r och inte av z. Med denna ansats blir de flesta termerna noll i ekvationerna (1-3) och vi får följande system

$$-\frac{u_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}\,, \tag{7}$$

$$0 = \nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right) - \frac{u_\theta}{r^2}\right)\,, \tag{8}$$

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g\,, \tag{9}$$

Ekvation (8) kan integreras på två olika sätt. Enligt det första sättet skriver vi om den som

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r u_\theta)\right) = 0\,. \tag{10}$$

Direkt integration ger nu

$$u_\theta = Ar + \frac{B}{r}\,, \tag{11}$$

där A och B är två integrationskonstanter. Enligt det andra sättet så gör vi ansatsen $u_\theta = C_m r^m$ och finner då att $m = \pm 1$, med två linjärt oberoende lösningar. Vi får då samma resultat (11). Villkoret att $u_\theta \to 0$ då $r \to \infty$ ger att $A = 0$ och villkoret $u_\theta(R) = \Omega R$ ger att $B = \Omega R^2$ och vi får lösningen

$$u_\theta = \frac{\Omega R^2}{r}\,. \tag{12}$$

b) För att bestämma formen på den fria vattenytan stoppar vi in (12) i (7) och integrerar

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\rho \Omega^2 R^4}{r^3} \quad \Rightarrow \quad p = -\frac{\rho}{2}\frac{\Omega^2 R^4}{r^2} + f(z)\,. \tag{13}$$

För att bestämma funktionen $f(z)$ integrerar vi (9).

$$p = -\rho g z + g(r)\,. \tag{14}$$

Från (13) och (14) ser vi att trycket kan skrivas

$$p = -\rho g z - \frac{\rho}{2}\frac{\Omega^2 R^4}{r^2} + C\,, \tag{15}$$

där C är en konstant. För $z = 0$ och $r \to \infty$ har vi att $p = p_{atm}$, vilket ger $C = p_{atm}$. Vid den fria vattenytan har vi att $p = p_{atm}$ och således får vi z-koordinaten av den fria ytan som funktion av den radiella koordinaten,

$$z = -\frac{\Omega^2 R^4}{2 g r^2}\,. \tag{16}$$

c) För att beräkna spänningen på cylindern använder vi uttrycket (se Appendix A)

$$\tau_{r\theta} = 2\mu e_{r\theta} = \mu \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) , \tag{17}$$

vilket ger

$$\tau_{r\theta}|_{r=R} = \mu r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{R^2 \Omega}{r^2} \right)_{r=R} = -2\mu\Omega \, . \tag{18}$$

Detta är alltså spänningen i $\mathbf{e}_\theta$-led på ytan vars enhetsnormalvektor pekar i $\mathbf{e}_r$-led. Minustecknet betyder att spänningen är motriktad $\mathbf{e}_\theta$ om Ω är positiv (se figur 2).

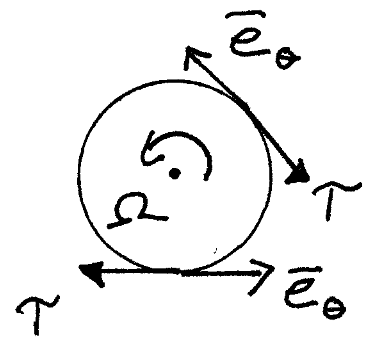

Figure 2: Spänningen på cylindern är motriktad rotationen, eftersom vattnet bromsar cylindern.

Exempel 6.2 Strömning inne i en roterande cylinder

En lång roterande cylinder är fylld med vatten på insidan. Rotationsaxeln är vertikal, cylinders vinkelhastighet är Ω och dess radie är R. Bestäm
a) hastighetsfältet i vattnet inne i cylindern,
b) formen av den fria vattenytan,
c) och spänningen på cylindern.

Lösning

a) Precis som i förra exemplet får vi att

$$u_\theta = Ar + \frac{B}{r} \, , \tag{19}$$

där A och B är två integrationskonstanter. Hastighetsfältet måste vara begränsat då $r = 0$. Därför har vi att $B = 0$. Randvillkoret $u_\theta(R) = \Omega R$ ger $A = \Omega$ och

$$u_\theta = \Omega r \, . \tag{20}$$

Vattnet på insidan av cylindern roterar alltså som en stel kropp.

b) För trycket får vi

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho\Omega^2 r \quad \Rightarrow \quad p = \frac{\rho\Omega^2 r^2}{2} + f(z)\,. \tag{21}$$

Precis som i förra exemplet integrerar vi (9) och får då

$$p = -\rho g z + g(r)\,. \tag{22}$$

vilket ger

$$p = \frac{\rho\Omega^2 r^2}{2} - \rho g z + C\,. \tag{23}$$

Om vi väljer noll-läget för z-axeln vid den fria ytan så får vi att $C = p_{atm}$, eftersom $p = p_{atm}$ då $r = z = 0$. Den fria ytan blir alltså parabolisk, med formen

$$z = \frac{\Omega^2 r^2}{2g} \tag{24}$$

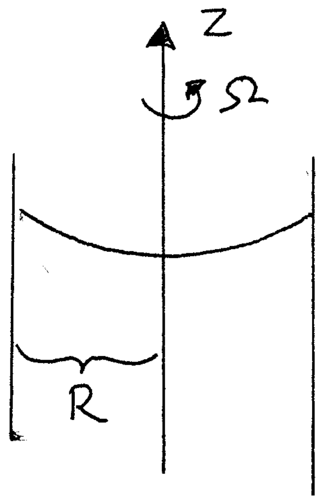

Figure 3: Den roterande cylindern generar en stelkroppsrotation av vattnet på insidan. Trycket sjunker mot centrum och därför sjunker ytan mot centrum.

c) Eftersom rörelsen är en stelkroppsrotation är töjningstensorn noll och därför är skjuvspänningarna noll, vilket vi lätt kan bekräfta med uttrycket (17). Det är alltså ingen spänning på cylindern.

2 En instationär lösning

Exempel 6.3 Stokes första problem

En stillastående inkompressibel fluid med densiteten ρ och viskositeten ν fyller ett halvoändligt rum ovanför x-axeln. Fluiden accelereras plötsligt av att randen som är parallell med x-axeln från det ena ögonblicket till det andra börjar röra sig med en hastighet U i positiv x-led. Bestäm

a) hastighetsfältets utveckling i tiden i fluiden,

b) spänningen på väggen som funktion av tiden.

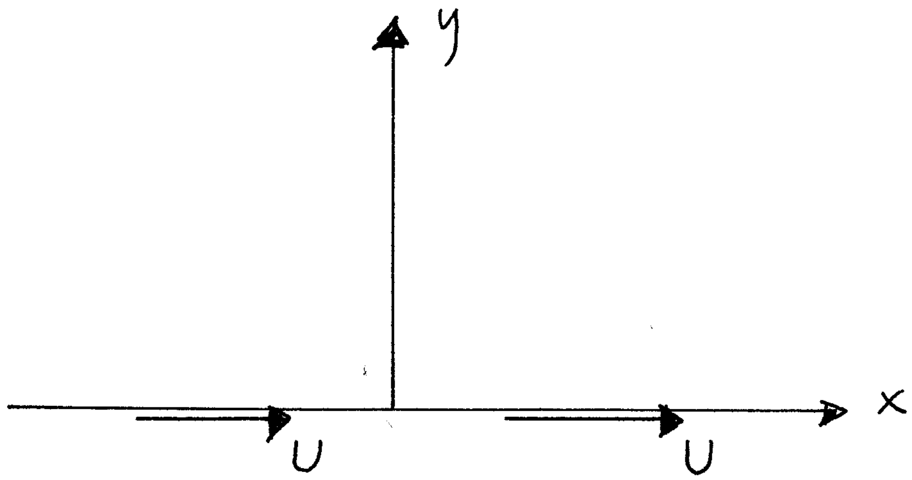

Figure 4: En platta börjar från det ena ögonblicket till det andra att röra sig med en hastighet U och sveper med sig en fluid.

Lösning

a) Uppenbarligen måste allting se likadant ut vid varje x-position. Hastighetsfältet och tryckfältet kan därför inte ha något x-beroende. Från kontinuitetsekvationen får vi

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad v = C\,. \tag{25}$$

Randvillkoret ger att $C = 0$, varför $v = 0$. Ekvationen för u kan skrivas

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\nabla^2 u\,. \tag{26}$$

Eftersom $v = 0$ och hastighetsfält och tryckfält är oberoende av x får vi nu

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,, \tag{27}$$

med randvillkoren

$$u = U \;\text{ då }\; y = 0\,,\;\; u \to 0 \;\text{ då }\; y \to \infty\,. \tag{28}$$

Vi ska nu lösa ekvationen (27) med randvillkoren (28) genom att göra en så kallad likformighetsansats:

$$u(y,t,\nu) = Uf(\eta)\,, \tag{29}$$

där η är en så kallad likformighetsvariabel, vilket innebär att den ska vara dimensionslös. De relevanta parametrarna är y, t och ν. Den kinematiska viskositeten har dimensionen L^2/T. Den dimensionslösa variabel som vi kan skapa från dessa parametrar är $y/\sqrt{\nu t}$. Vi väljer

$$\eta = \frac{y}{2\sqrt{\nu t}}\,. \tag{30}$$

Att inkludera tvåan i nämnaren ska visa sig praktiskt, men det är inte nödvändigt för att komma fram till lösningen. Vi får nu

$$\frac{\partial u}{\partial t} = U\,\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\eta}\,\frac{\partial \eta}{\partial t} = -U\,\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\eta}\,\frac{\eta}{2t}\,, \tag{31}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = U\,\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\eta}\,\frac{\partial \eta}{\partial y} = U\,\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\eta}\,\frac{1}{2\sqrt{\nu t}}\,, \tag{32}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = U\,\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}\eta^2}\,\frac{1}{4\nu t}\,. \tag{33}$$

Vi sätter nu in (31) och (33) i (27) och får

$$-2\eta\,\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\eta} = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}\eta^2}\,. \tag{34}$$

Randvillkoren blir

$$f = 1 \;\text{ då }\; \eta = 0\,, \quad f \to 0 \;\text{ då }\; \eta \to \infty\,. \tag{35}$$

Ekvation (34) kan integreras en gång genom följande manipulation

$$\frac{\mathrm{d}f'}{f'} = -2\eta\,\mathrm{d}\eta \quad\Rightarrow\quad \ln f' = -\eta^2 + K \quad\Rightarrow\quad f' = Ce^{-\eta^2}\,. \tag{36}$$

Ytterligare en integration ger

$$f = C\int_0^\eta e^{-\eta^2}\,\mathrm{d}\eta + A\,, \tag{37}$$

där A är en ny integrationskonstant. Från villkoret $f = 1$ då $\eta = 0$ får vi att $A = 1$ och från villkoret i oändligheten får vi

$$C = -\frac{1}{\int_0^\infty e^{-\eta^2}\,\mathrm{d}\eta} = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}\,. \tag{38}$$

Lösningen kan följaktligen skrivas

$$f = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\eta e^{-\eta^2}\,\mathrm{d}\eta = 1 - \mathrm{erf}(\eta)\,, \tag{39}$$

där vi infört den så kallade ”error-funktionen”,

$$\mathrm{erf}(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-\eta^2}\,\mathrm{d}\eta\,. \tag{40}$$

I termer av de ursprungliga variablerna kan lösningen skrivas

$$u = U\left(1 - \mathrm{erf}\left(\frac{y}{2\sqrt{\nu t}}\right)\right) \tag{41}$$

Detta är ett exempel på en likformighetslösning. Har vi lösningen för en tidpunkt för en speciell fluid med en given viskositet så känner vi också lösningen för alla andra tider och dessutom känner vi lösningen för en annan fluid med en annan viskositet. Om vi exempelvis skulle utföra ett experiment med två olika fluider och plotta hastigheten som funktion av y för olika tider för de två olika fluiderna, så skulle alla dessa kurvor bli olika. Ju längre tiden har gått desto större är hastigheten vid en given y-koordinat. Dessutom kommer hastigheten för den fluid som har större viskositet att vara större vid en given tid och en given y-koordinat. Om vi däremot skalar om alla kurvor genom att dividera y med $2\sqrt{\nu t}$ så kommer de att sammanfalla. Detta gäller kurvorna för en och samma fluid vid olika tidpunkter, men också kurvorna för de två olika fluiderna.

b) Väggskuvspänningen blir

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} = \mu U \left[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right]_{y=0} = -\rho U \sqrt{\frac{\nu}{\pi t}}\,, \tag{42}$$

där minustecknet betyder att spänningen på väggen är riktad i negativ x-led, vilket innebär att fluiden bromsar väggen. Då $t \to 0$ får vi en oändligt stor spänning. Detta ofysikaliska resultat är en konsekvens av det ofysikaliska antagandet att väggen börjar röra sig i ett enda ögonblick, d v s med oändligt stor acceleration.