

I anslutning till föreläsningarna den 19/9 och 21/9 om atomer som polariseras av ett yttre E-fält

Exempel på atom som polariseras av ett dynamiskt fält.

Atomen har resonansvinkelfrekvensen ω_0 och vi försummar dämpning pga av t ex kollisioner och strålning.

Fältet slås på vid tiden 0 och ansluter sig exponentiellt med tidkonstanten τ till slutvärdet E_0 .

Inducerade dipolmomentet blir (visas ej här, men relaterat material finns i kursboken 9.4.3)

$$> p1 := q \sqrt{\frac{4 \pi \epsilon_0 a^3}{m}} E_0 \text{ expand} \left(\int_0^t \left(1 - e^{-\frac{u}{\tau}} \right) \sin(\omega_0 (t - u)) du \right)$$

$$p1 := 2 q \sqrt{\frac{\pi \epsilon_0 a^3}{m}} E_0 \left(-\frac{\cos(\omega_0 t)}{\omega_0 (1 + \omega_0^2 \tau^2)} - \frac{\tau \sin(\omega_0 t)}{1 + \omega_0^2 \tau^2} + \frac{1}{\omega_0 (1 + \omega_0^2 \tau^2)} + \frac{\omega_0 \tau^2}{1 + \omega_0^2 \tau^2} - \frac{\omega_0 \tau^2}{(1 + \omega_0^2 \tau^2) e^{\left(\frac{t}{\tau}\right)}} \right)$$

Specialfall 1: Vi "smyger igång" fältet, vilket är likvärdigt med att vi låter $\omega_0 \tau = x \gg 1$.

$$> p2 := \text{subs} \left(\tau = \frac{x}{\omega_0}, p1 \right)$$

$$p2 := 2 q \sqrt{\frac{\pi \epsilon_0 a^3}{m}} E_0 \left(-\frac{\cos(\omega_0 t)}{\omega_0 (1 + x^2)} - \frac{x \sin(\omega_0 t)}{(1 + x^2) \omega_0} + \frac{1}{\omega_0 (1 + x^2)} + \frac{x^2}{\omega_0 (1 + x^2)} - \frac{x^2}{\omega_0 (1 + x^2) e^{\left(\frac{t \omega_0}{x}\right)}} \right)$$

Om vi låter det gå mycket lång tid, $t \gg \tau$, "dör" den femte (sista) termen i parentesen. Med $x \gg 1$ blir då den fjärde termen dominerande och approximeras med $1/\omega_0$. Således får vi

$$> p := q \sqrt{\frac{4 \pi \epsilon_0 a^3}{m}} E_0 \frac{1}{\omega_0}$$

Sätter vi nu in uttrycket för ω_0 får vi

$$> p := \text{evalf} \left(\text{subs} \left(\omega_0 = \frac{q}{\sqrt{\frac{4 \pi \epsilon_0 a^3}{m}}}, p \right) \right)$$

$$p := 4. \pi \epsilon_0 a^3 E_0$$

vilket är det resultat för polariserbarheten som vi fick fram den 19/9.

Specialfall 2: Om vi istället "sparkar igång" fältet som ett steg (låter τ (x) gå mot noll) fås att

$$> p := 4 \pi \epsilon_0 a^3 E_0 (1 - \cos(\omega_0 t))$$

dvs en odämpad svängning kring jämviktsläget.