

Föreläsning 7.

1 Cirkulation och vorticitet

Ett mycket viktigt teorem i klassisk strömningsmekanik är Kelvins cirkulations-teorem, som man kan härleda från Eulers ekvationer. Teoremet gäller för en inviskös och barotrop fluid. En barotrop fluid är en fluid för vilken densiteten kan skrivas som en funktion av trycket, vilket är ett ganska generellt villkor som mycket ofta är uppfyllt. En inkompressibel fluid är ett specialfall av en barotrop fluid. Teoremet säger att cirkulationen

$$\Gamma = \int_C \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_t ds, \quad (1)$$

längs en godtycklig *materiell* enkel sluten kurva C i en inviskös barotrop fluid är en konserverad storhet. Här är \mathbf{e}_t enhetstangentvektorn till kurvan och integrationen utförs längs kurvan. Att kurvan är materiell innebär att den i varje punkt har samma hastighet som fluiden, med andra ord "följer den med" i fluidens rörelser. Kelvins cirkulationsteorem kan också skrivas

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0. \quad (2)$$

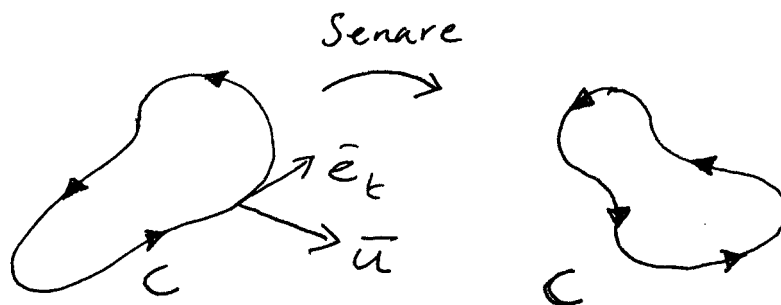


Figure 1: Enligt Kelvins teorem är cirkulationen längs en materiell kurva, C , en konserverad storhet.

Enligt Stokes sats kan vi också skriva cirkulationen som

$$\Gamma = \int_S \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (3)$$

där $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$ är vorticiteten. Integrationen utförs över en yta, S , som kurvan omsluter och \mathbf{n} är enhetsnormalvektorn till denna yta.

En konsekvens av Kelvins teorem är att ett strömningsfält i en inviskös, barotrop fluid som är rotationsfritt i ett givet ögonblick kommer att förbli så för alla tider. I klassisk potentialteori gör man antagandet att hastighetsfältet är rotationsfritt, med andra ord att $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$. Enligt en sats i vektoranalysen kan man för ett rotationsfritt hastighetsfält, \mathbf{u} , definiera en potential, ϕ , sådan att

$$\mathbf{u} = \nabla \phi. \quad (4)$$

Inkompressibilitetsvillkoret, $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, kan då skrivas

$$\nabla^2 \phi = 0, \quad (5)$$

vilket är Laplace-ekvationen. I klassisk potentialteori bestämmer man hastighetsfältet, exempelvis kring en vinge, genom att lösa Laplace-ekvationen. Randvillkoret på vingens yta som man använder i potentialteori är att normalkomponenten av hastighetsfältet ska vara noll, medan tangentialkomponenten får vara nollskild. Fluiden tillåts alltså att glida fritt över en fast rand.

I de flesta böcker i strömningsmekanik utgör klassisk potentialteori en väsentlig del. Teorin är vacker och ger en del intressanta resultat. Bland annat så kan man relatera den totala lyftkraften på en vinge till cirkulationen runt vingen. Men teorin har också mycket stora begränsningar och leder till uppenbart felaktiga resultat. Exempelvis så blir det aerodynamiska motståndet (ofta kallat luftmotståndet) noll kring alla kroppar, enligt potentialteorin. Detta resultat kallas för "d'Alamberts paradox", efter den franske matematikern och upplysningsfilosofen Jean le Rond d'Alambert som först visade det. Detta uppenbart orimliga resultat är en konsekvens av antagandet att fluiden är inviskös och därmed fri att glida längs en rand. I verkligheten kommer viskositeten alltid att vara betydelsefull i ett tunt skikt nära en rand. Ett sådant skikt kallas för ett gränsskikt. I gränsskiktet gäller inte Kelvins cirkulationsteorem och därmed kan man inte anta att vorticiteten är noll i gränsskiktet. Tvärtom så är vorticiteten mycket betydelsefull i gränsskiktet.

2 Gränsskikt

Vidhäftningsvillkoret som säger att hastigheten ska vara noll längs en fast rand medför att en fluid kommer att bromsas upp kraftigt nära en fast rand. Vid strömning längs en slank eller strömlinjeformad kropp kommer den tangentiella hastigheten att förändras mycket kraftigt i ett tunt skikt nära randen. Detta skikt kallas gränsskiktet. Om den tangentiella hastigheten är u och koordinaten normalt mot randen är y så kommer derivatan $\partial u / \partial y$ att vara mycket stor i gränsskiktet. Som vi ska se så kan gränsskiktstjockleken, δ , uppskattas på olika sätt, eftersom det inte finns något absolut sätt att definiera var gränsskiktet slutar. Men det faktum att gränsskiktet vanligtvis är mycket tunt, gör att vi kan förenkla ekvationerna för strömningen nära en fast rand.

Vi ska först använda oss av Navier-Stokes ekvationer för att uppskatta gränsskiktstjockleken. Vi betraktar en strömning längs en strömlinjeformad kropp, exempelvis en vinge, och tänker oss att strömningen lokalt kan beskrivas med en Cartesiskt koordinatsystem där x är den tangentiella koordinaten och y den normala koordinaten i förhållande till randen (se figur 2). Friströmshastigheten är U . Den typiska längdskalan i x -led är då längden av kroppen L och längdskalan i y -led är δ . x -komponenten av Navier-Stokes ekvationer kan skrivas

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right). \quad (6)$$

I gränsskiktet så är viskösa krafter viktiga. Därför måste termen

$$\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (7)$$

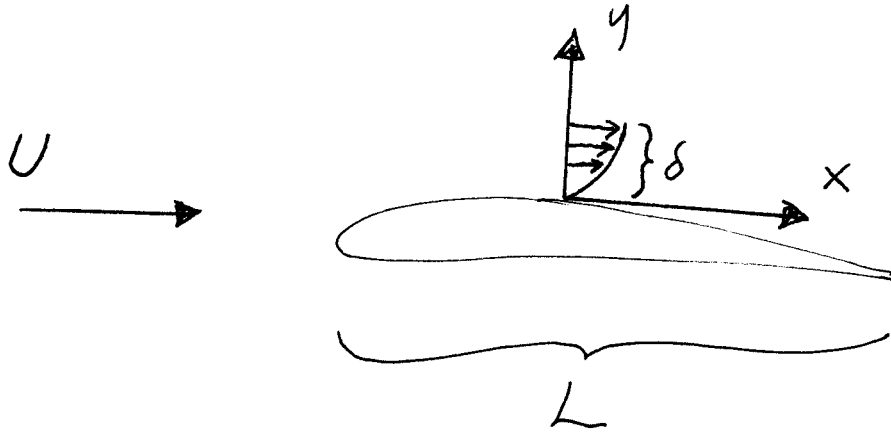


Figure 2: Gränsskiktstjockleken δ är mycket mindre än L . I figuren är δ överdrivet stor.

vara en term av ledande ordning i ekvation (6). Om vi också antar att termen

$$u \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (8)$$

är av ledande ordning så ger en grov storleksuppskattning

$$u \frac{\partial u}{\partial x} \sim \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Rightarrow \frac{U^2}{L} \sim \nu \frac{U}{\delta^2} \Rightarrow \frac{\delta}{L} \sim Re^{-1/2}, \quad (9)$$

där

$$Re = \frac{UL}{\nu}, \quad (10)$$

är *Reynoldstalet*. För de flesta tillämpningar är Reynoldstalet mycket stort vilket medför att $\delta \ll L$. Om vi t e x ska uppskatta gränsskiktstjockleken i strömningen över motorhuvens av en bil som kör i stadstrafik så kan vi sätta $U \sim 10$ m/s, $L \sim 1$ m, $\nu \sim 10^{-5}$ m²/s, vilket ger $Re = 10^6$ och $\delta \sim 10^{-3}L \sim 1$ mm. Detta är naturligtvis en grov uppskattning.

Det fullständiga ekvationssystem som beskriver gränsskiktet är Navier-Stokes ekvationer i två dimensioner tillsammans med kontinuitetsekvationen

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (11)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \quad (12)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (13)$$

Vi ska nu visa att detta system kan förenklas avsevärt då $Re \ll 1$. Vi gör detta genom att införa icke-dimensionella variabler som vi definerar på ett sådant sätt att de redan från början innehåller information om storleksordningar. Vi låter U

och p_∞ vara friströmshastigheten och trycket långt uppströms gränsskiktet. Vi antar att hastigheten i x -led är av storleksordningen U och att $\partial p/\partial x \sim \rho u \partial u/\partial x$. Detta ger storleksordningsuppskattningen

$$p_\infty - p \sim \rho U^2. \quad (14)$$

För att uppskatta storleksordningen på den vertikala hastigheten använder vi inkompressibilitetsvillkoret

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x} \Rightarrow v \sim \frac{\delta}{L} U \sim Re^{-1/2} U. \quad (15)$$

Med dessa storleksordningsuppskattningar kan vi nu införa de icke-dimensionella variablerna

$$x' = \frac{x}{L}, \quad y' = \frac{y}{\delta} = \frac{y}{L} Re^{1/2}, \quad (16)$$

$$u' = \frac{u}{U}, \quad v' = \frac{v}{U} Re^{1/2}, \quad p' = \frac{p - p_\infty}{\rho U^2}. \quad (17)$$

I termer av de dimensionslösa variablerna kan nu vårt ekvationssystem skrivas

$$u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} = -\frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2}, \quad (18)$$

$$\frac{1}{Re} \left(u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} \right) = -\frac{\partial p'}{\partial y'} + \frac{1}{Re^2} \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2}, \quad (19)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (20)$$

För stora Reynoldstal kan vi nu bortse från alla termen av storleksordningen Re^{-1} och Re^{-2} . Om vi återgår till dimensionella storheter kan då systemet skrivas

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (21)$$

$$0 = \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (22)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (23)$$

Den andra ekvationen (22) säger att trycket inte beror av y -koordinaten och därför är konstant genom gränsskiktet. Eftersom trycket inte beror av y så har vi ersatt partialderivatan, $\partial p/\partial x$, med motsvarande ordinära derivata, dp/dx , i ekvation (21). Tryckgradienten kan uttryckas med hjälp av friströmshastigheten, U_e , som är hastigheten vid gränsskiktets rand. Från Bernoullis ekvation får vi

$$\frac{p}{\rho} + \frac{U_e^2}{2} = \text{Konstant}, \quad (24)$$

längs en strömlinje vid gränsskiktets övre rand. Detta ger

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = U_e \frac{dU_e}{dx}. \quad (25)$$

Randvillkoren för gränsskiktsekvationerna är

$$u(x, 0) = 0, \quad (26)$$

$$v(x, 0) = 0, \quad (27)$$

$$u(x, \infty) = U_e(x), \quad (28)$$

$$u(x_0, y) = u_{in}(y), \quad (29)$$

där u_{in} är en initialhastighet som är given vid en position x_0 .

2.1 Olika mått på gränsskiktets tjocklek

$$u = 0.99U_e$$

Ett mått på gränsskiktets tjocklek fås genom att anta att gränsskiktet slutar vid den y -position för vilken hastigheten u antagit 99 % av friströmshastigheten U_e . Gränsskiktstjockleken, δ_{99} , definieras då genom sambandet

$$u(x, \delta_{99}) = 0.99U_e(x), \quad (30)$$

där δ_{99} utläses "delta-nittionio".

Förträngningstjockleken

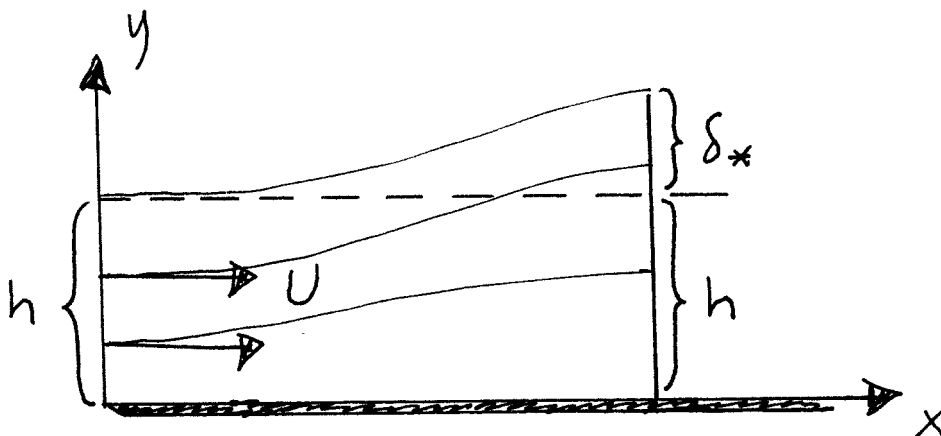


Figure 3: Förträngningstjockleken, δ_* , är det avstånd som strömlinjerna långt ifrån väggen förskjuts från väggen, p g a att väggen finns där.

Ett annat mått på gränsskiktets tjocklek är att definiera den som det avstånd, δ_* , som en strömlinje långt ifrån väggen har förträngts eller förflyttats ut från väggen på grund av inbromsningen. För en plan platta är $U_e = U$ inte är en funktion av x . Från masskonservering får vi då (se figur 3)

$$\int_0^h U dy = \int_0^{h+\delta_*} u(x, y) dy \approx \int_0^h u(x, y) dy + \delta_* U, \quad (31)$$

där vi utnyttjat att $u(x, y) \approx U$ då $y > h$, eftersom h ligger långt från väggen. Om vi låter $h \rightarrow \infty$ får vi

$$\delta_\star = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U}\right) dx, \quad (32)$$

vilket är definitionen av förträngningstjockleken.

Rörelsemängdstjockleken

Som vi har tidigare har sett så är det totala rörelsemängdsflödet över en kontrollvolym ränder lika med kraften som verkar på kontrollvolymen. Om tryckgradienten är noll får vi för kontrollvolymen i figur 3,

$$-\int_0^h \rho U^2 dy + \int_0^{h+\delta_\star} \rho u^2 dy = -f, \quad (33)$$

där

$$f = \int_0^x \mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} dx, \quad (34)$$

är friktionskraften i x -led (per längdenhet i z -led) på plattan. Enligt Newtons tredje lag så är kraften på fluiden från plattan lika stor men motsatt riktad kraften på plattan från fluiden, därav minustecknet i vänsterledet av (33). Rörelsemängdstjockleken, θ , definierar vi genom

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{f}{\rho U^2} = \int_0^h \left(1 - \frac{u^2}{U^2}\right) dy - \frac{1}{\rho U^2} \int_h^{h+\delta_\star} \rho u^2 dy = \\ &= \int_0^h \left(1 - \frac{u^2}{U^2}\right) dy - \delta_\star = \int_0^h \left(1 - \frac{u^2}{U^2}\right) dy - \int_0^h \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy. \end{aligned} \quad (35)$$

Vi kan nu ersätta den övre integrationsgränsen med ∞ och får då

$$\theta = \int_0^\infty \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy. \quad (36)$$

2.2 Von Kármáns integralteorem

Om vi stoppar in (25) i (22) så får vi

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U_e \frac{dU_e}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (37)$$

Om vi adderar och subtraherar $u(dU_e/dx)$ till vänsterledet så kan denna ekvation skrivas

$$(U_e - u) \frac{dU_e}{dx} + u \frac{\partial(U_e - u)}{\partial x} + v \frac{\partial(U_e - u)}{\partial y} = -\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (38)$$

där vi utnyttjat att $\partial U_e / \partial y = 0$. Om vi nu integrerar (38) från 0 till ∞ , så får vi såsmåningom Von Kármáns integralteorem

$$\frac{d}{dx} (U_e^2 \theta) + \delta_\star U_e \frac{dU_e}{dx} = \frac{\tau_v}{\rho}, \quad (39)$$

där τ_v är väggskjuvspänningen. I labbrapporten som ni ska skriva vill vi ha en fullständig och detaljerad härledning av (39).