KTH Teknikvetenskap

SF1626 Flervariabelanalys
Lösningsförslag till kontrollskrivning 2
Måndagen den 26 september, 2011

1. Beräkna $\displaystyle\iint_D x^2 e^{xy}\,dx\,dy$, där D är rektangeln $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 1$. **(4)**

LÖSNINGSFÖRSLAG

Integrationsområdet är en rektangel och därför verkar det vara lämpligt att beräkna dubbelintegralen som en upprepad enkelintegral. Sett till området spelar det ingen roll om x eller y integreras först, men integranden verkar vara enklare att integrera i y först,

$$\begin{aligned}\iint_D x^2 e^{xy}\,dx\,dy &= \int_0^2 dx \int_0^1 x^2 e^{xy}\,dy \\ &= \int_0^2 dx\;\; x^2 \left[\frac{e^{xy}}{x}\right]_{y=0}^{y=1} \\ &= \int_0^2 x^2\Big(\frac{e^x}{x} - \frac{e^0}{x}\Big)\,dx \\ &= \int_0^2 x(e^x - 1)\,dx.\end{aligned}$$

Denna enkelintegral beräknas sedan med en partiell integration,

$$\begin{aligned}\int_0^2 x(e^x-1)\,dx &= \Big[x(e^x - x)\Big]_0^2 - \int_0^2 1\cdot(e^x - x)\,dx \\ &= 2(e^2-2) - 0 - \Big[e^x - \tfrac{1}{2}x^2\Big]_0^2 \\ &= 2e^2 - 4 - \big(e^2 - \tfrac{1}{2}\cdot 2^2 - (e^0 - 0)\big) \\ &= 2e^2 - 4 - e^2 + 2 + 1 \\ &= e^2 - 1.\end{aligned}$$

2. Givet funktionen $f(x, y) = (x + y)(x - y + 1)$ som är definierad i området $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$.
   a) Förklara hur det på förhand går att veta att funktionen antar ett största och ett minsta värde i området. **(1)**
   b) Bestäm det största och minsta värdet av $f(x, y)$ i området. **(3)**

LÖSNINGSFÖRSLAG

a) Eftersom funktionen $f(x, y)$ är ett polynom är den också kontinuerlig och vidare är området $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$ en kompakt mängd (sluten och begränsad). Då är det garanterat att funktionen f antar ett största och ett minsta värde i området (sats 1.4 i kursboken).

b) Funktionen $f(x, y)$ antar sitt största och minsta värde i en av följande punkter:

1. inre stationära punkter,
2. punkter på randlinjerna, eller
3. hörnpunkterna.

Vi undersöker dessa tre fall.

1. I en inre stationär punkt är $f'_x = f'_y = 0$, vilket ger ekvationssystemet

$$\begin{cases} f'_x \equiv 2x + 1 = 0, \\ f'_y \equiv -2y + 1 = 0, \end{cases}$$

som har lösningen $(x, y) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

2. Randen till området består av fyra räta linjestycken som behöver undersökas:

- På linjen $x = -1$ är funktionen lika med $f(-1, y) = -y^2 + y$ och vi får fram möjliga extrempunkter genom att sätta derivatan lika med noll,

$$\frac{d}{dy} f(-1, y) \equiv -2y + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = \tfrac{1}{2},$$

vilket svarar mot punkten $(x, y) = (-1, \frac{1}{2})$.

- På linjen $x = 1$ antar funktionen värdena $f(1, y) = 2 - y^2 + y$ och då ser vi direkt från föregående fall att den enda möjliga extrempunkten finns i $y = \frac{1}{2}$, dvs. i punkten $(x, y) = (1, \frac{1}{2})$.

- Vidare, på linjen $y = -1$ är $f(x, -1) = x^2 + x - 2$ och genom att sätta derivatan lika med noll fås

$$\frac{d}{dx} f(x, y) \equiv 2x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\tfrac{1}{2}.$$

Detta ger punkten $(x, y) = (-\frac{1}{2}, -1)$.

- På den sista linjen $y = 1$ är $f(x,y) = x^2 - x$ och föregående fall ger att $x = -\frac{1}{2}$ är den enda möjliga extrempunkten. Alltså, punkten $(x,y) = (-\frac{1}{2}, 1)$.

3. Området har fyra hörnpunkter $(-1,-1)$, $(-1,1)$, $(1,-1)$ och $(1,1)$.

Jämför vi funktionens värde i de framtagna punkterna

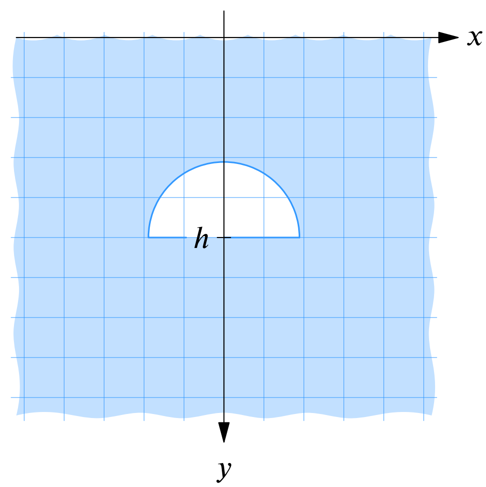
$$\begin{aligned} f(-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) &= 0, & f(-\tfrac{1}{2},-1) &= -\tfrac{9}{4}, & f(-1,1) &= 0,\\ f(-1,\tfrac{1}{2}) &= \tfrac{1}{4}, & f(-\tfrac{1}{2},1) &= -\tfrac{1}{4}, & f(1,-1) &= 0,\\ f(1,\tfrac{1}{2}) &= \tfrac{9}{4}, & f(-1,-1) &= -2, & f(1,1) &= 2, \end{aligned}$$

ser vi att största värde är $\frac{9}{4}$ och minsta värde är $-\frac{9}{4}$.

3. I en simbassäng finns ett halvcirkelformat fönster D med radie R och vars medelpunkt befinner sig på djupet h, där $h > R$, enligt figuren. Införs ett koordinatsystem som i figuren så ges den kraft som vattentrycket utövar på fönstret av

$$F = \iint_D (p_0 + \varrho g y)\,dx\,dy,$$

där p_0 är lufttrycket vid vattenytan, ϱ är vattnets densitet och g är tyngdaccelerationen. Bestäm kraften F. **(4)**



LÖSNINGSFÖRSLAG

Inför vi polära koordinater centrerade kring punkten $(x,y) = (0,h)$,

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta,\\ y &= h + r\sin\theta, \end{aligned}$$

så kan fönstret beskrivas som

$$0 \le r \le R \quad \text{och} \quad \pi \le \theta \le 2\pi.$$

(Tänk på att y-axeln pekar nedåt.)

Areaformen $dx\,dy$ blir densamma som vid vanliga polära koordinater, $r\,dr\,d\theta$, och kraft-integralen blir därmed

$$
\begin{aligned}
F &= \iint_D (p_0 + \varrho g y)\,dx\,dy \\
&= \iint_D \big(p_0 + \varrho g(h + r\sin\theta)\big)\,r\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^R r\,dr \int_\pi^{2\pi} (p_0 + \varrho g h + \varrho g r\sin\theta)\,d\theta \\
&= \int_0^R r\,dr \Big[\,(p_0 + \varrho g h)\theta - \varrho g r\cos\theta\,\Big]_\pi^{2\pi} \\
&= \int_0^R r\big((p_0 + \varrho g h)\pi - 2\varrho g r\big)\,dr \\
&= \Big[\,\tfrac{1}{2}(p_0 + \varrho g h)\pi r^2 - \tfrac{2}{3}\varrho g r^3\,\Big]_0^R \\
&= \tfrac{1}{2}(p_0 + \varrho g h)\pi R^2 - \tfrac{2}{3}\varrho g R^3.
\end{aligned}
$$

Svar:

1. $e^2 - 1$
2. Största värde $= \frac{9}{4}$ och minsta värde $= -\frac{9}{4}$.
3. $F = \frac{1}{2}(p_0 + \varrho g h)\pi R^2 - \frac{2}{3}\varrho g R^3$