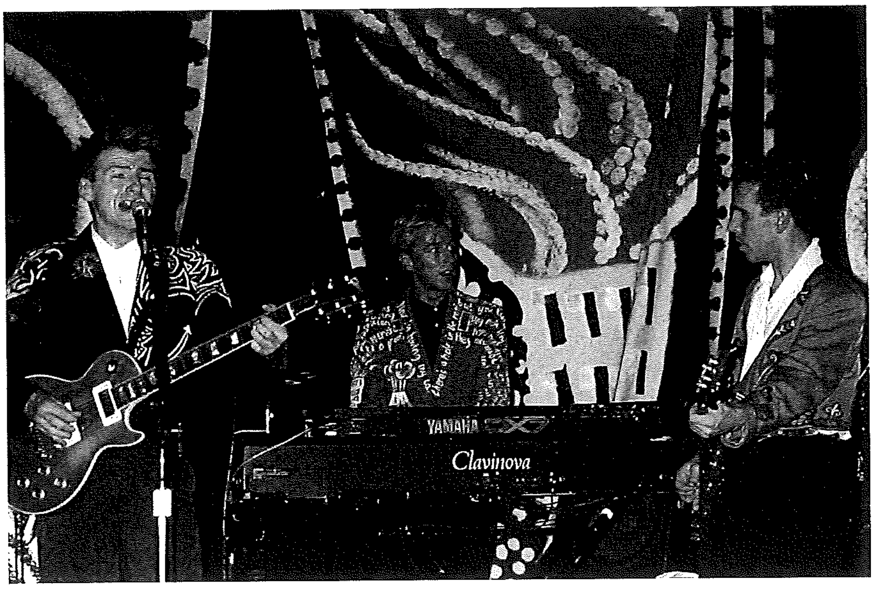
12. Musik, bilder och matematik

Vi har i kapitel 5 sett hur matematikens tal och alfabetets bokstäver representeras binärt med nollor och ettor. Men hur bär man sig åt för att binärt representera mänskligt tal, musik och bilder? Hur kan man lagra musik som nollor och ettor på en CD-skiva, och hur kan man återskapa musiken ur dessa nollor och ettor? Och hur kan man genomföra lagringen så att den tar så liten plats som möjligt (komprimering)? Det handlar det här kapitlet om. Det började för 200 år sedan med det som kallas *Fourier-analys* efter upphovsmannen, fransmannen Jean Baptiste Joseph Fourier (1768–1830). Fourier-analysen



Figur 12.1. Mycket av den moderna musiken framställs med hjälp av synthesizers. Fram till omkring 1983 var dessa analoga, men därefter har de digitala helt tagit över. Bakom utvecklingen av de digitala syntarna ligger en matematisk analys av hur ljud framställs. Med denna som grund utvecklades tekniken vid Stanforduniversitetet och gick sedan rakt in i Yamaha DX-7, den första helt digitala synten.

har idag utvecklats till en effektiv datorbaserad metod för *signalbehandling*. Under senare tid har konkurrerande metoder dykt upp, *wavelets* (småvågor, krusningar) och *fraktala metoder*. Fourier-analysen och datorn har i grunden förändrat vår industri och hela vårt samhälle.

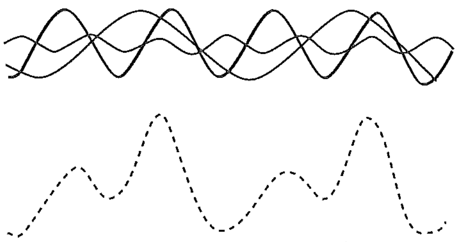
Fourier-analys

Fouriers insats innebär bl.a. att man kan spela ett musikstycke där man ersatt instrumenten med en uppsättning stämgafflar och en metod att kontrollera stämgafflarnas ljudstyrka. Vad innebär detta? En stämgaffel avger en vibration som fortplantas genom luften och grafiskt kan representeras som en *enkel svängning* (enkel ton), som breder ut sig med tiden. På ett oscilloskop som är anslutet till en mikrofon syns den som en så kallad *sinusvåg* (figur 12.2). Avståndet från en topp till nästa topp på kurvan är sinusvågens svängningstid T i sekunder, *våglängden* (*perioden*); vågens *frekvens* anges av $1/T$, antalet svängningar per sekund, vilket innebär att när våglängden minskar så ökar frekvensen. Topparnas höjd i figur 12.2 är sinusvågens *amplitud*, som anger vågens *ljudstyrka*.

Figur 12.2. En enkel svängning (sinusvåg). Om våglängden är $T = 1/50$ sekund, är frekvensen $1/T = 50$ svängningar per sekund, 50 Hz (hertz).

Ljud utbreder sig i luft som variationer av tryck och i en mikrofon som en elektrisk spänning. En musikton är en periodisk variation i lufttrycket. Tillämpat på musik innebär Fouriers insats att en musikton är sammansatt som en summa av ett antal enkla svängningar (enkla toner) av den typ som är illustrerad i figur 12.2; en musikton är en syntes av enkla svängningar. I figur 12.3 visas en ton som är summan av tre enkla svängningar med olika frekvenser och ljudstyrka.

För att kunna ge en exaktare beskrivning av Fouriers insats ska vi använda de trigonometriska funktionerna $\sin t$ och $\cos t$ som införs i rutan *Trigonometriska funktioner*. En *sinusvåg* (sinussignal) är grafen till $y = A\sin(Bt + C)$ där A, B och C är reella konstanter och t en reell variabel, tiden. Sinusvågens



Figur 12.3. Tonen nederst är summan av de tre övre, enkla tonerna. Kurvan nederst visar tonens utbredning i tiden och de tre enkla tonerna visar tonens uppdelning i frekvenser.

amplitud (största värde) är A (om $A > 0$), dess *period* är $T = 2\pi/B$ och dess *frekvens* är $1/T = B/2\pi$. Man kan visa att sinusvågen kan skrivas på formen

$$y = a\cos Bt + b\sin Bt,$$

där a och b är reella konstanter som beror av A och C. Antag nu att f är en periodisk signal, t.ex. en musikton, med period $T = 2\pi$, dvs. att $f(t + 2\pi) = f(t)$, för alla t. Fourier påstod att då kan $f(t)$ skrivas som en oändlig summa av sinusvågor, *Fourier-serien* för f,

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

där a_n och b_n är *Fourier-koefficienterna* för f,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt\,dt$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin nt\,dt$$

Den oändliga summan betyder att vi ska summera termerna $(a_n \cos nt + b_n \sin nt)$, då n går från 1 till N, dvs. för $n = 1, 2, \ldots, N$, och sedan låta N gå mot oändligheten. Om f är en musikton med period 2π så är tonen summan av en grundton, termen $a_n \cos nt + b_n \sin nt$ för $n = 1$, och övertoner, termerna $a_n \cos nt + b_n \sin nt$ för $n > 1$. Fourier-koefficienterna a_n och b_n anger styrkan för sinusvågen $a_n \cos nt + b_n \sin nt$ med period $2\pi/n$ och frekvens $n/2\pi$. Stora värden på n innebär höga frekvenser. Om tonen har en period T som är skild från 2π så gäller teorin fortfarande men formlerna blir en aning mer komplicerade.

Vi inför nu korta, praktiska beteckningar med komplexa tal, $e^{int} = \cos nt + i \sin nt$, där i är imaginära enheten, $i = \sqrt{-1}$. Man kan visa att Fourier-serien då kan skrivas i *komplex form*

$$f(t) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int},$$

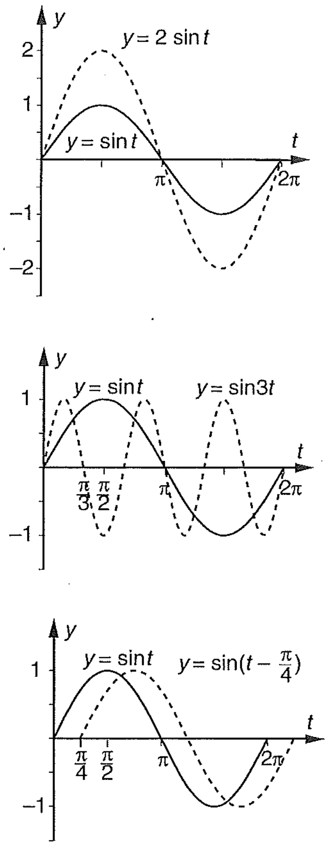
där beteckningen betyder att vi ska summera $c_n e^{int}$ då n går från $-N$ till N och sedan låta N gå mot oändligheten, och där

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int}\, dt$$

är *Fourier-koefficienterna i komplex form*. Här har termen $c_n e^{int}$ amplitud c_n och frekvens $n/2\pi$. Det är denna form på Fourier-serien och Fourier-koefficienterna som vi ska utgå från i nästa avsnitt, *Diskreta Fourier-transformen.*

Man kan säga att en periodisk signal och dess Fourier-serie är två sidor av samma sak. Signalen $f = f(t)$ ger information om hur signalen beror av tiden, av signalens tidsförlopp. Dess Fourier-serie ger information om frekvensinnehållet i signalen. Om f svarar mot en musikinspelning visar f hur musiken förändras med tiden, men den avslöjar inte frekvenserna på de enkla toner som bygger upp musiken. Fourier-serien avslöjar frekvenserna, men det är svårt att av dessa frekvenser få en uppfattning av hur musiken varierar med tiden. I regel är Fourier-koefficienterna små för termer i Fourier-serien med höga frekvenser. Det betyder att man ur Fourier-serien kan återskapa signalen med stor noggrannhet även om man stryker termer med hög frekvens. Man behöver alltså bara beräkna ett litet antal Fourier-koefficienter. Detta visar sig i sin tur betyda att det räcker att ur Fourier-serien beräkna signalen $f(t)$ (sampelvärdena) för ett litet antal tidsvärden t. Man kan sedan ur dessa sampelvärden återskapa $f(t)$ för alla t.

Fourier påstod alltså att periodiska signaler kan representeras som en oändlig summa, signalens Fourier-serie. Han gav inget bevis för sitt påstående men han testade det på ett antal funktioner. Andra matematiker hade svårt att acceptera Fouriers tankegång och bl.a. utbröt åsiktsutbyte om vad som menas med en funktion. Många menade att en funktion är något som definieras av ett uttryck, t.ex. $y = x^2 + 1$, men om något definieras som *ett* uttryck i ett intervall och *ett annat* uttryck i ett annat intervall, så är det inte frågan om *en* funktion utan om *två* funktioner. Fourier och en rad matematiker under 1700-talet, bl.a. Euler, studerade det vi nu kallar Fourier-serier i samband med problem om en vibrerande sträng (se kapitel 3) och problem om värmeutbredning. Euler och Fourier härledde oberoende av varandra formlerna för Fourier-koefficienterna.



Figur 12.4. $y = 2\sin t$ **har amplituden 2;** $y = \sin 3t$ **har perioden** $\frac{2\pi}{3}$**;** $y = \sin(t - \frac{\pi}{4})$ **är** $y = \sin t$ ***fasförskjuten*** $\frac{\pi}{4}$**.**

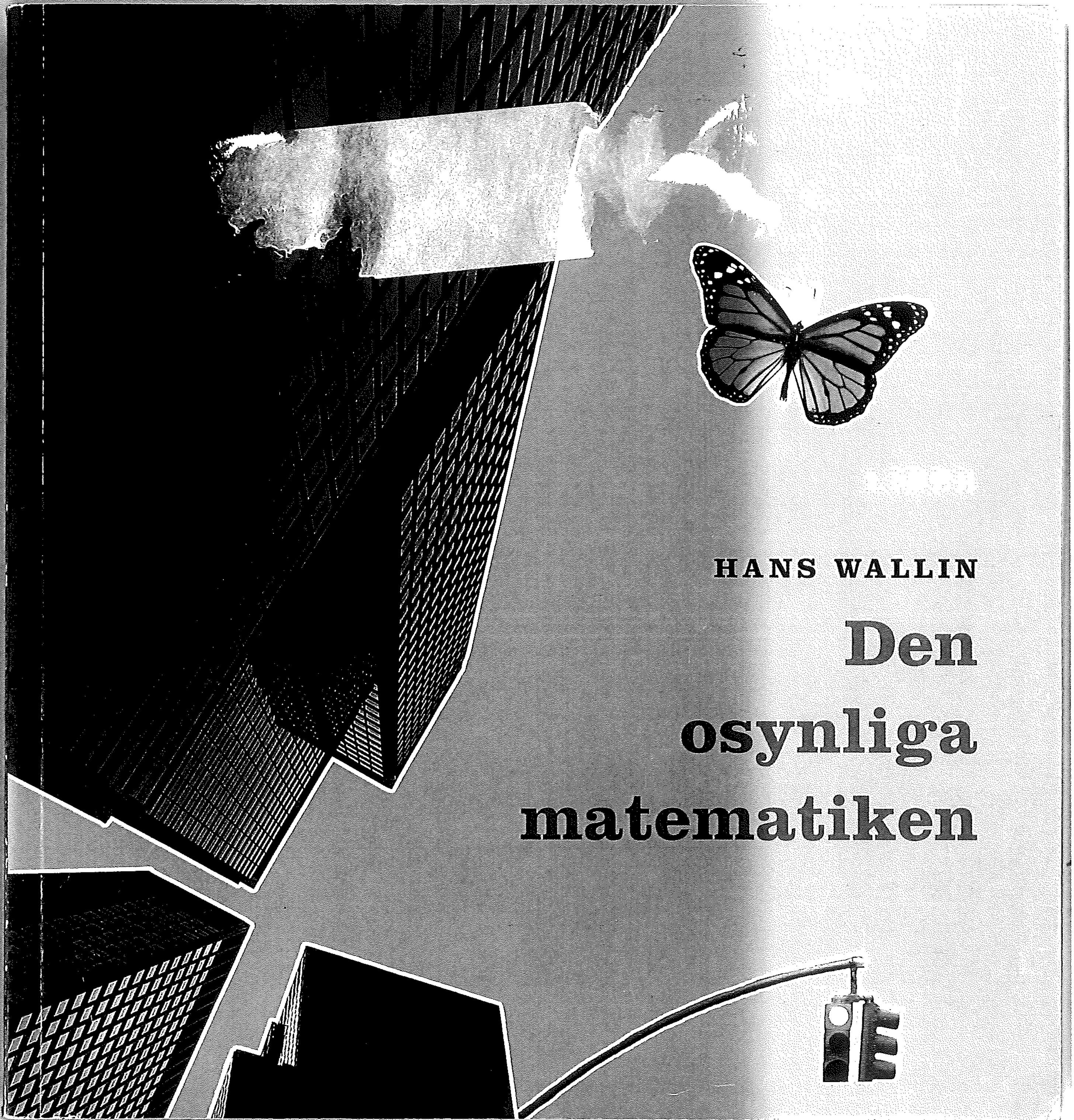
Den definition av begreppet funktion som vi i stort sett använder än idag gavs av Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859): en *funktion* $y = y(x)$ är given om vi har en regel, vilken som helst, som tilldelar ett bestämt värde till y för varje x i en mängd av punkter. Dirichlet bevisade även, för en stor klass av funktioner, Fouriers påstående att periodiska funktioner representeras av sin Fourier-serie. Teorin är dock komplicerad och har sysselsatt matematiker ända in i våra dagar. Cantor inspirerades av teorin för Fourier-serier när han grundlade sin abstrakta mängdlära (se slutet av kapitel 4). Teorin för Fourier-serier har också varit inspirationskälla för det som kallas *funktionalanalys*, som är ett viktigt hjälpmedel i matematiken och i olika tillämpningar, t.ex. i den matematiska teorin för kvantmekaniken.

Vi har beskrivit teorin för Fourier-serier för periodiska funktioner som beror av *en* variabel t, men teorin finns generaliserad till periodiska funktioner som beror av två eller flera variabler (och är periodiska i varje variabel). Det finns också en motsvarande teori för funktioner som inte är periodiska, men då ersätts Fourier-serien av en integral, en så kallad Fourier-integral.

TRIGONOMETRISKA FUNKTIONER

Vi har i kapitel 5 definierat $\sin v$ och $\cos v$ för vinklar v i en rätvinklig triangel. I figur 12.5 har vi ritat cirkeln med medelpunkt i origo O och radie 1, *enhetscirkeln*. Vi låter t beteckna vinkeln med vinkelbenen OQ och OP. När P flyttar sig moturs från Q på enhetscirkeln får vi vinklar t mellan 0° och 360°.

Vi ska i det här kapitlet inte mäta vinkeln t i grader utan i det som kallas *radianer* (bågmått). När P flyttar sig 360° moturs från Q längs enhetscirkeln, kommer P tillbaka


HANS WALLIN
Den
osynliga
matematiken

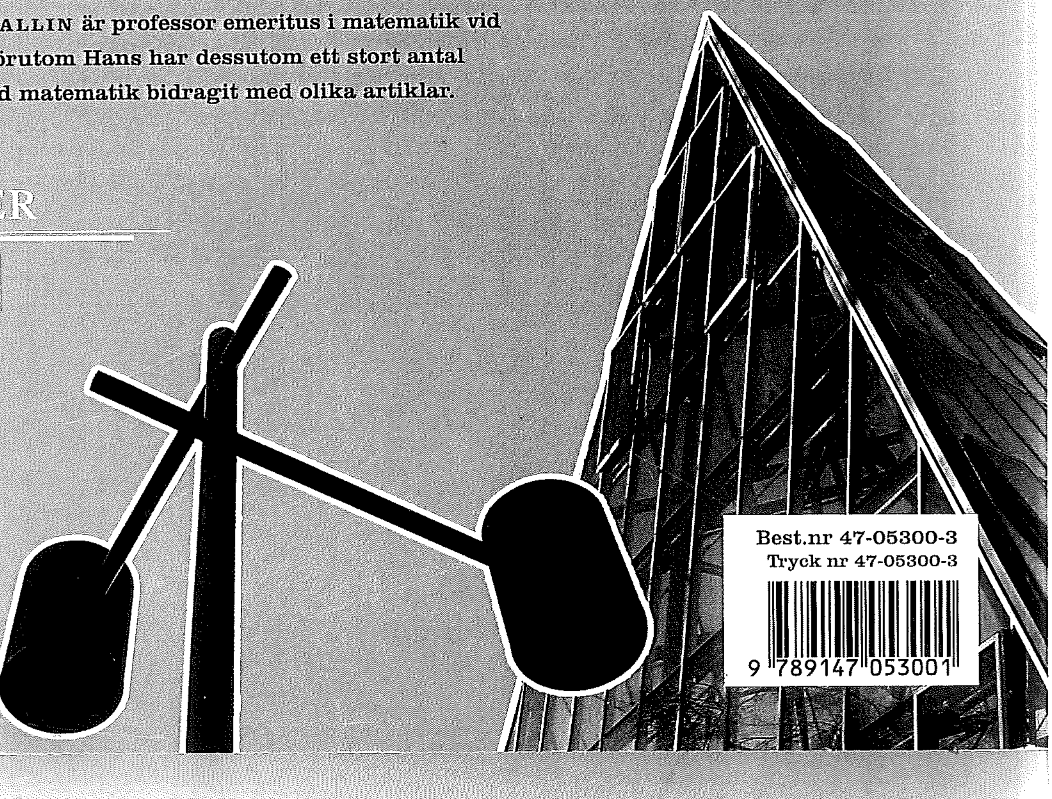
Anledningen till att matematik är och har förblivit ett stort ämne i skolan är dess stora användbarhet. Allt större delar av vår teknik och samhällsorganisation styrs av datoriserade modeller med matematikinnehåll som får en snabbt växande betydelse inom olika vetenskaper och teknikområden.

Den osynliga matematiken handlar om hur matematiken används i samhället och i vår beskrivning av omvärlden. När vi pratar i vår mobiltelefon ser vi aldrig den matematik som ligger till grund för tekniken. Vi undrar varför en cd-skiva kan fungera trots att den är rispad osv. Boken handlar om all denna osynliga matematik och om allmängiltigheten i de matematiska idéerna bakom.

Den osynliga matematiken är tänkt som kurslitteratur för blivande lärare och andra som på högskolenivå studerar matematik, men är också ytterst angelägen för verksamma matematiklärare. Vi hoppas att denna bok på längre sikt kan hjälpa till att förändra attityden i samhället till matematik. Läsaren kommer att upptäcka matematikens inre skönhet och att matematiken är en osynlig del av vår kultur som är väl värd att synliggöra.

Författaren HANS WALLIN är professor emeritus i matematik vid Umeå Universitet. Förutom Hans har dessutom ett stort antal experter på tillämpad matematik bidragit med olika artiklar.

LIBER



Best.nr 47-05300-3
Tryck nr 47-05300-3
9 789147 053001