KTH Teknikvetenskap

SF1624 ALGEBRA OCH GEOMETRI
SEMINARIEUPPGIFTER OCH REKOMMENDERADE UPPGIFTER FÖR VECKA 5
HT10

Se www.kth.se/social/course/SF1624 för information om hur seminarierna fungerar och vad du förväntas göra inför och under seminarierna.

UPPGIFTER TILL SEMINARIE 5

Uppgift 1. Antag att $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix}$, där a och b är två konstanter med $b \neq 0$.

(a) Visa att $\lambda_1 = a + 2b$ är ett egenvärde till $\mathbf{A}$, samt bestäm alla egenvektorer svarande mot λ_1.

(b) Visa att $\lambda_2 = a - b$ är ett egenvärde till $\mathbf{A}$, samt bestäm alla egenvektorer svarande mot λ_2.

(c) Avgör om varje egenvektor svarande mot λ_1 är vinkelrät mot varje egenvektor svarande mot λ_2.

Uppgift 2. I denna uppgift är $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$.

(a) Motivera hur du utan några räkningar kan se att $\lambda = 0$ måste vara ett egenvärde till $\mathbf{A}$.

(b) Bestäm samtliga egenvärden och motsvarande egenvektorer till $\mathbf{A}$.

(c) Bestäm en 3×3 diagonalmatris $\mathbf{D}$ och en 3×3 ickesingulär matris $\mathbf{P}$ sådana att $\mathbf{A}$ kan skrivas på formen $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}$.

(d) Använd detta för att visa att $\mathbf{A}^5 = 16\mathbf{A}$.

Uppgift 3. För varje delfråga nedan som du besvarar bekräftande ska du bestämma samtliga sådana matriser $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, eller $\mathbf{C}$. Motivera alla svar ordentligt!

(a) Finns det en 3×3 matris $\mathbf{A}$ för vilken
$(1\,0\,0)^\mathsf{T}$ är en egenvektor med egenvärdet 2,
$(0\,1\,0)^\mathsf{T}$ är en egenvektor med egenvärdet 3, och
$(1\,1\,0)^\mathsf{T}$ är en egenvektor med egenvärdet 5?

(b) Finns det en 3×3 matris $\mathbf{B}$ för vilken
$(1\,0\,0)^\mathsf{T}$ är en egenvektor med egenvärdet 2,
$(0\,1\,0)^\mathsf{T}$ är en egenvektor med egenvärdet 3, och
$(1\,1\,1)^\mathsf{T}$ är en egenvektor med egenvärdet 5?

(c) Finns det en 3×3 matris $\mathbf{C}$ för vilken
$(1\,0\,0)^\mathsf{T}$ är en egenvektor med egenvärdet 2,
$(0\,1\,0)^\mathsf{T}$ är en egenvektor med egenvärdet 2, och
$(1\,1\,1)^\mathsf{T}$ är en egenvektor med egenvärdet 2?

Uppgift 4. Låt A vara en $n \times n$ matris som har precis n egenvärden när varje egenvärde räknas med sin algebraiska multiplicitet. Då är produkten av dessa n egenvärden lika med $\det(A)$ och summan av de n egenvärdena är lika med spåret $\mathrm{tr}(A)$ (trace of A), dvs summan av matriselementen på huvuddiagonalen.
Antag nu att A är en 4×4 matris med $\det(A) = -24$ och $\mathrm{tr}(A) = 5$. Antag vidare att man vet att både -2 och 3 är egenvärden till A. Bestäm alla egenvärden till A och deras algebraiska multipliciteter. Kan du avgöra om A är diagonaliserbar? Motivera svaret.

Uppgift 5. Låt A vara en 3×3 matris med en känd egenvektor $\mathbf{u}$ och ett känt egenvärde α som *ej* hör till varandra, dvs $A\mathbf{u} \neq \alpha\mathbf{u}$. Förklara noggrant hur du går tillväga för att bestämma alla A:s egenvärden och alla A:s egenrum. Illustrera med ett belysande exempel.

Uppgift 6. Betrakta följande (grovt förenklade) modell för vädret på KTH Campus:

Vädret en viss dag är antingen “Bra” eller “Dåligt”, definierat av om det kommer något regn den dagen (= Dåligt) eller inte (= Bra).
Om det är bra vädret en viss dag så är sannolikheten för att det kommer att vara bra även dagen därpå $= 0{,}8$, medan sannolikheten för att det kommer att växla till dåligt är $0{,}2$.
Om det är dåligt vädret en viss dag så är sannolikheten för att det kommer att vara dåligt även dagen därpå $= 0{,}6$, medan sannolikheten för att det kommer att växla till bra är $0{,}4$.

För att kunna analysera denna modell, numrerar vi först dagarna så att “idag” är dag 0, “imorgon” är dag 1, “i övermorgon” är dag 2, etc. Sedan låter vi $x_B(k)$ beteckna sannolikheten för att det kommer att vara bra väder dag k, samt låter $x_D(k)$ beteckna sannolikheten för att det kommer att vara dåligt väder dag k (där k är ett positivt heltal).

Om vi exempelvis antar att vädret är dåligt idag, så ges sannolikheterna för vädret imorgon av

(1)
$$\begin{aligned} x_B(1) &= 0{,}4, \\ x_D(1) &= 0{,}6. \end{aligned}$$

Men då ges sannolikheterna för vädret i övermorgon av

(2)
$$\begin{aligned} x_B(2) &= 0{,}8\,x_B(1) + 0{,}4\,x_D(1) &= 0{,}8 \cdot 0{,}4 + 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}56, \\ x_D(2) &= 0{,}2\,x_B(1) + 0{,}6\,x_D(1) &= 0{,}2 \cdot 0{,}4 + 0{,}6 \cdot 0{,}6 = 0{,}44. \end{aligned}$$

Allmänt har vi följande samband mellan vädersannolikheterna dagarna k och $k{+}1$:

(3)
$$\begin{aligned} x_B(k{+}1) &= 0{,}8\,x_B(k) + 0{,}4\,x_D(k), \\ x_D(k{+}1) &= 0{,}2\,x_B(k) + 0{,}6\,x_D(k). \end{aligned}$$

Observera att (1) följer från (3) om vi sätter $x_B(0) = 0$ och $x_D(0) = 1$.
Sambanden (3) kan skrivas på matris-vektorformen

(4)
$$\mathbf{x}(k{+}1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k),\ k = 0, 1, 2, \ldots$$

där $\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} x_B(k) \\ x_D(k) \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}(k{+}1) = \begin{bmatrix} x_B(k{+}1) \\ x_D(k{+}1) \end{bmatrix}$ och $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}6 \end{bmatrix}$.

Beroende på om vädret är bra eller dåligt dag 0 fås olika "begynnelsevillkor", nämligen $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ om vädret är bra dag 0, respektive $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ om vädret är dåligt dag 0.

Nu till dina uppgifter.

(a) Faktorisera matrisen $\mathbf{A}$ på formen $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$,
där $\mathbf{D}$ är en $2{\times}2$ diagonalmatris och $\mathbf{P}$ en $2{\times}2$ ickesingulär matris.
(b) Motivera formeln $\mathbf{A}^k = \mathbf{PD}^k\,\mathbf{P}^{-1}$, för $k = 1, 2, 3, \ldots$
(c) Motivera sedan formeln $\mathbf{x}(k) = \mathbf{PD}^k\,\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}(0)$, för $k = 1, 2, 3, \ldots$
(d) Använd sistnämnda formel för att beräkna sannolikheten för bra väder om en vecka, dels för fallet att det är bra väder idag, dels för fallet att det är dåligt väder idag. Kommentera resultatet. (Använd vid behov miniräknare eller dator i den sista deluppgiften.)

REKOMMENDERADE UPPGIFTER

Utöver ovanstående seminarieuppgifter rekommenderas följande uppgifter från kursboken till självstudier och övningar:

Kapitel 5 — Egenvärden och egenvektorer		
5.1.	Egenvärden och egenvektorer	1, 3.b, 5.b, 9,11, 15, 18, 23, 25, 27.
5.2	Diagonalisering	5, 7, 9, 15, 19, 21, 23.