KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Lösningsförslag med bedömningskriterier till kontrollskrivning 2
Måndagen den 27 september, 2010

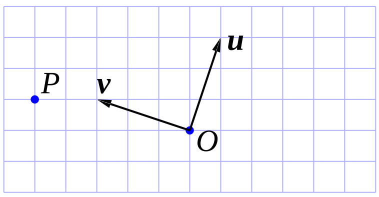
UPPGIFT

(1) Beräkna dimensionerna av radrummet, kolonnrummet och nollrummet till matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ -3 & -3 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

(4)

(2) I nedanstående figur illustreras en bas $B = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ för $\mathbb{R}^2$ och en punkt P. Bestäm koordinaterna för P med avseende på basen B.



(4)

(3) Speglingen i en linje genom origo i $\mathbb{R}^2$ med normalvektor $\mathbf{n}$ fås av

$$T(\mathbf{u}) = \mathbf{u} - 2\,\mathrm{proj}_{\mathbf{n}}\,\mathbf{u} = \mathbf{u} - 2\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}}{||\mathbf{n}||^2}\mathbf{n}.$$

Bestäm standardmatrisen för speglingen i linjen $y = 2x$ i $\mathbb{R}^2$. **(4)**

LÖSNINGSFÖRSLAG

(1) De sökta dimensionerna påverkas inte av elementära radoperationer. Använd första raden för att få inledande nollor i de övriga raderna:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ -3 & -3 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 + 2r_1 \\ r_3 + 3r_1 \\ r_4 - 3r_1 \\ r_5 - r_1 \end{bmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & -5 \\ 0 & 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Använd nu andra raden för att få så många nollor som möjligt i den andra kolumnen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & -5 \\ 0 & 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 + 3r_2 \\ r_4 - 2r_2 \\ r_5 - 4r_2 \end{bmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 11 \\ 0 & 0 & 4 & -11 \\ 0 & 0 & 4 & -11 \end{pmatrix}$$

Genom att använda den tredje raden får vi enbart nollor på de sista två raderna:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 11 \\ 0 & 0 & 4 & -11 \\ 0 & 0 & 4 & -11 \end{pmatrix} \sim \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ -\frac{1}{4}r_3 \\ r_4 + r_3 \\ r_5 + r_3 \end{bmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -11/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Denna matris är på trappstegsform, och vi noterar att vi har tre nollskilda rader. Radrummet har alltså dimension 3, och nollrummet har dimension $4 - 3 = 1$. Enligt känd sats har kolonnrummet samma dimension som radrummet, alltså 3. Allt detta gäller även den ursprungliga matrisen.

(2) Med skalan **1 ruta = 1 enhet** får vi att $\mathbf{u} = (1, 3)$, $\mathbf{v} = (-3, 1)$, och $P = (-5, 1)$.

Koordinaterna för P i basen B ges nu av (x, y) där

$$x(1, 3) + y(-3, 1) = (-5, 1)$$

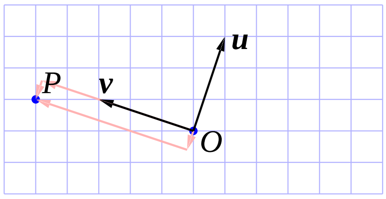
vilket ger oss ekvationssystemet

$$\begin{cases} x - 3y = -5 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$$

Med Gauss-Jordans metod på totalmatrisen för systemet får vi

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -5 \\ 3 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 - 3r_1 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -5 \\ 0 & 10 & 16 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} r_1 + \frac{3}{10}r_2 \\ \frac{1}{10}r_2 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & \frac{8}{5} \end{array}\right]$$

Alltså ges lösningen av $(x, y) = (-\frac{1}{5}, \frac{8}{5})$, vilket är koordinaterna för P med avseende på basen B.



FIGUR 1. Uppdelningen av ortsvektorn $\overline{OP}$ i kompsanter $\mathbf{u}$-led och $\mathbf{v}$-led.

(3) I formeln för speglingen krävs att vi känner till en normalvektor för linjen. Om vi skriver om ekvationen som $2x - y = 0$ kan vi se att koefficienterna ger koordinaterna för en normalvektor och vi kan sätta $\mathbf{n} = (2, -1)$. Vi får då att $||\mathbf{n}||^2 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 2^2 + (-1)^2 = 5$.

För att bestämma standardmatrisen för avbildningen kan vi se på hur avbildningen behandlar standardbasvektorerna eftersom bilden av dessa ger kolonnerna i standardmatrisen.

Med $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ och $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ får vi nu med hjälp av formeln för speglingen att

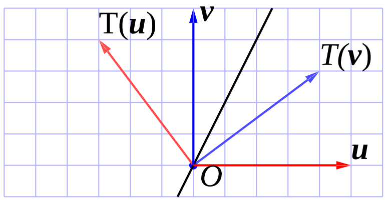
$$T(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 - 2\frac{\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{n}}{||\mathbf{n}||^2}\mathbf{n} = (1, 0) - 2\frac{(1, 0) \cdot (2, -1)}{||(2, -1)||^2}(2, -1) = (1, 0) - 2\frac{2}{5}(2, -1) = (\frac{-3}{5}, \frac{4}{5})$$

och

$$T(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_2 - 2\frac{\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{n}}{||\mathbf{n}||^2}\mathbf{n} = (0, 1) - 2\frac{(0, 1) \cdot (2, -1)}{||(2, -1)||^2}(2, -1) = (0, 1) - 2\frac{-1}{5}(2, -1) = (\frac{4}{5}, \frac{3}{5}).$$

Alltså ges standardmatrisen för avbildningen T av

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$



FIGUR 2. Figur av speglingen med $\mathbf{u} = \mathbf{5}e_1$ och $\mathbf{v} = \mathbf{5}e_2$.

Svar:

(1) Dimensionen för rad- och kolonnrum är 3 och dimensionen för nollrummet är 1.
(2) Koordinaterna för P med avseende på basen B är $(-\frac{1}{5}, \frac{8}{5}) = (-0{,}2,\ 1{,}6)$.
(3) Standardmatrisen för speglingen i linjen $y = 2x$ ges av $A = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$.

PRELIMINÄRA BEDÖMNINGSKRITERIER

Mindre räknefel ger i allmänhet inget avdrag, om de inte väsentligen förändrar karaktären hos uppgiften.

(1)
- Korrekt utförd Gausselimination, **1 poäng**.
- Korrekt motiverad slutsats om radrummets dimension, **1 poäng**.
- Korrekt motiverad slutsats om kolonnrummets dimension, **1 poäng**.
- Korrekt motiverad slutsats om nollrummets dimension, **1 poäng**.

(2)
- Korrekt införda koordiater i systemet , **1 poäng**.
- Korrekt uppställda villkor på koordinaterna för P med avseende på basen B, **1 poäng**.
- Korrekt lösning av ekvationssystem, **1 poäng**.
- Korrekt motiverad slutsats om koordinaterna för P med avseende på basen B, **1 poäng**.

(3)
- Korrekt metod för att bestämma standardmatrisen, **1 poäng**.
- Korrekt beräknad $T(\mathbf{e}_1)$, **1 poäng**.
- Korrekt beräknad $T(\mathbf{e}_2)$, **1 poäng**.
- Korrekt motiverad slutsats om standardmatrisen för T, **1 poäng**.