KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Modelltentamen
Läsåret 10/11

Skrivtid: 14.00-19.00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Mats Boij

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng.

På de tre första uppgifterna, som utgör del A, är det endast möjligt att få 0, 3 eller 4 poäng. Dessa tre uppgifter kan ersättas med resultat från den löpande examinationen. De två kontrollskrivningarna svarar mot uppgift 1 och 2 och seminarierna mot uppgift 3. Godkänd kontrollskrivning eller godkänd seminarieserie ger 3 poäng på motsvarande uppgift och väl godkänd kontrollskrivning eller seminarieserie ger 4 poäng. För att höja från den löpande examinationen från 3 poäng till 4 krävs att hela uppgiften löses. Det är maximum mellan resultatet från den löpande examinationen och resultatet på motsvarande uppgift på tentamen som räknas. Resultat från den löpande examinationen kan endast tillgodoräknas vid ordinarie tentamen och ordinarie omtentamen för den aktuella kursomgången.

De tre följande uppgifterna utgör del B och de tre sista uppgifterna del C, som är främst till för de högre betygen, A, B och C.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	-	-	-	-

Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa. Motivera väl! För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är välpresenterad och att det finns utförligt med förklarande text till beräkningarna. Lösningar som saknar förklarande text bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

DEL A

(1) (a) Använd Gauss-Jordans metod för att bestämma lösningsmängden till ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2, \\ 3x_1 + 6x_2 - x_3 - 9x_4 = 11, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = -3. \end{cases}$$

(3)

(b) Bestäm villkoret på a, b och c för att det ska finnas lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 = a, \\ 3x_1 + 6x_2 - x_3 - 9x_4 = b, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = c. \end{cases}$$

(1)

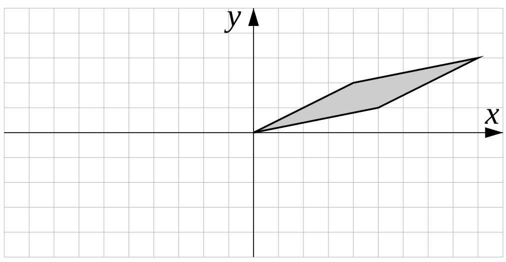
(2) Ett område Ω i planet $\mathbb{R}^2$ avbildas genom den linjära avbildningen T med standardmatris

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

på parallellogrammen med hörn i punkterna $(0,0)$, $(5,1)$, $(4,2)$ och $(9,3)$.

(a) Bestäm området Ω. (Använd egenskaperna hos linjära avbildningar, exempelvis att linjestycken avbildas på linjestycken.) **(3)**

(b) Jämför arean av Ω med arean av bilden $T(\Omega)$. **(1)**



FIGUR 1. Bilden, $T(\Omega)$, av området Ω under avbildningen T.

(3) Den vinkelräta projektionen på planet som ges av ekvationen $x - 2y + 3z = 0$ är en linjär avbildning och kan därmed beskrivas med hjälp av en matris. Bestäm standardmatrisen för denna projektion genom att se på hur den verkar på standardbasvektorerna. **(4)**

Var god vänd!

DEL B

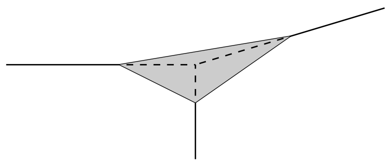
(4) Betrakta matrisen

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 8 \\ -2 & 4 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 12 \\ -2 & 4 & 2 & 16 \end{pmatrix}$$

(a) Bestäm en bas för radrummet[1] till A med hjälp av Gausselimination. **(3)**

(b) Använd relationen mellan dimensionerna för radrum och nollrum[2] för att med hjälp av resultatet från 4a också bestämma dimensionen av nollrummet till A. **(1)**

(5) En triangulär skärm ska sättas upp i ett hörn av ett rum där väggar och tak är vinkelräta mot varandra. Använd vektorprodukten[3] för att bestämma ett uttryck för skärmens area om skärmens tre hörnpunkter har avstånd a cm, b cm, respektive c cm från hörnet. **(4)**



FIGUR 2. Skärmens placering vid taket i ett av rummets hörn.

(6) (a) Förklara varför det i allmänhet är enkelt att bestämma egenvärdena för övertriangulära matriser. **(1)**

(b) Bestäm om möjligt en basbytesmatris P som diagonaliserar den övertriangulära matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

(3)

Var god vänd!

[1] Radrummet är det delrum som spänns upp av radvektorerna i matrisen.
[2] Nollrummet till A är lösningsmängden till ekvationen $Ax = 0$.
[3] Vektorprodukten kallas också för kryssprodukt.

DEL C

(7) När vi med den minsta-kvadratmetoden försöker hitta den ellips med ekvation

$$ax^2 + bxy + cy^2 = 1$$

som bäst passar till punkterna $(2,2)$, $(-2,1)$, $(-1,-2)$ och $(2,-1)$ leds vi till ekvationen

$$\begin{pmatrix} 49 & 2 & 28 \\ 2 & 28 & 20 \\ 28 & 20 & 34 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix} \tag{1}$$

som har lösningen $a = 0{,}10$, $b = -0{,}15$ och $c = 0{,}30$.

(a) Utför beräkningarna som leder fram till ekvationen (1). (Gausseliminationen av ekvationssystemet (1) behöver inte utföras.) **(3)**

(b) Förklara vad som menas med att lösningen $a = 0{,}10$, $b = -0{,}15$ och $c = 0{,}30$ är bäst i *minsta-kvadratmening*. **(1)**

(8) Låt Q_a vara den kvadratiska formen som ges av

$$Q_a(x,y,z) = a(x^2 + y^2 + z^2) + 2xy + 2yz$$

där a är en reell parameter.

(a) Bestäm för vilka värden på parametern a som Q_a är positivt definit. **(3)**

(b) Låt a vara det minsta värdet för vilket Q_a är positivt semidefinit. Bestäm det största värde Q_a antar på enhetssfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. **(1)**

(9) För varje naturligt tal $n \geq 2$ kan vi se på det delrum V av $\mathbb{R}^n$ som ges av lösningarna till ekvationen $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$.

(a) Visa att vektorerna $f_1 = e_1 - e_2$, $f_2 = e_2 - e_3, \ldots, f_{n-1} = e_{n-1} - e_n$ utgör en bas för V om $e_1, e_2, \ldots, e_n$ är standardbasvektorerna för $\mathbb{R}^n$. **(2)**

(b) Använd Gram-Schmidts metod för att utifrån den givna basen för V skapa en ortogonal bas för V med avseende på den euklidiska inre produkten på $\mathbb{R}^n$. **(2)**